Antônio Sardella
Edison da Matta

Matemática

8ª Série

1m

1m

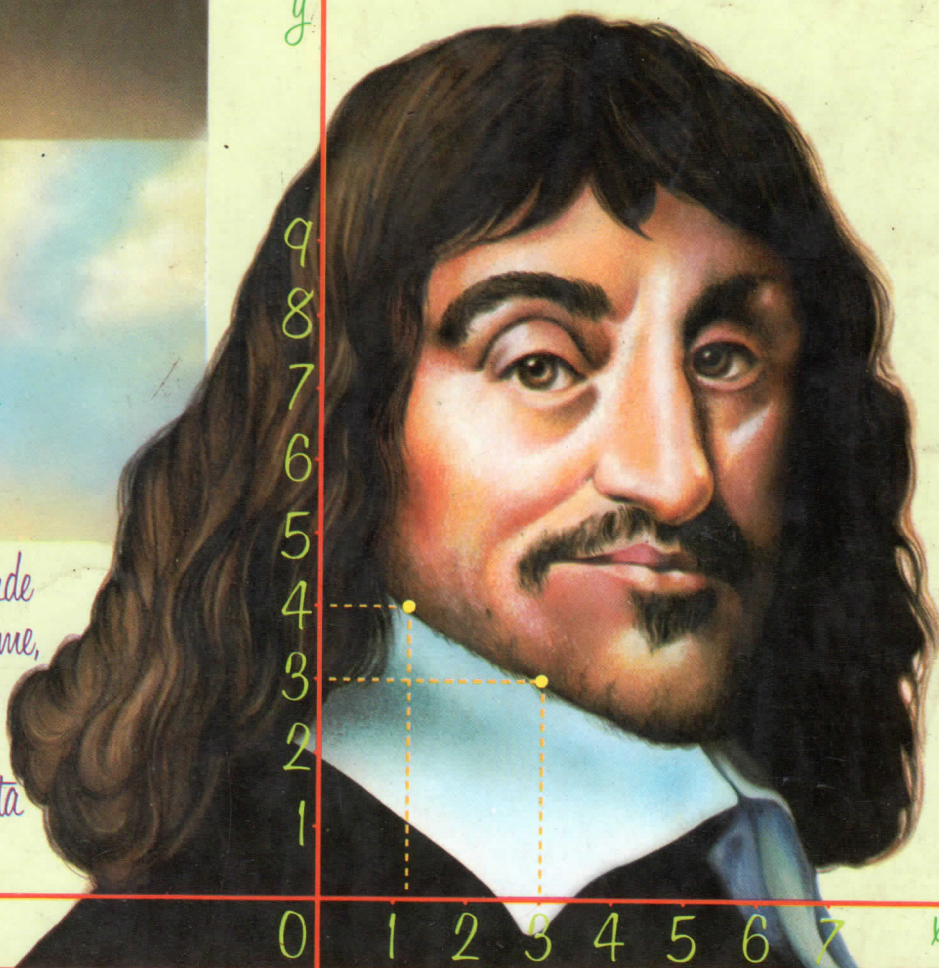
1m

Metro cúbico: unidade fundamental de medida de volume, correspondente ao volume de um cubo, cuja medida do comprimento da aresta é de 1 metro.

y

9 8 7 6 5 4 3 2 1

0 1 2 3 4 5 6 7 x

editora ática

De acordo com o Guia Curricular do Estado de São Paulo

Caro colega

Temos a satisfação de lhe apresentar este livro de Matemática destinado à 8ª série do Primeiro Grau. Ao elaborá-lo tivemos a preocupação de seguir dois critérios que julgamos de fundamental importância para o êxito de qualquer livro didático:

- **Não trazer complicações ao aluno** – Este critério nos levou a escrever o texto numa linguagem simples e direta, por vezes mesmo coloquial, o que, em nosso entender, é fundamental para o entendimento dos assuntos.

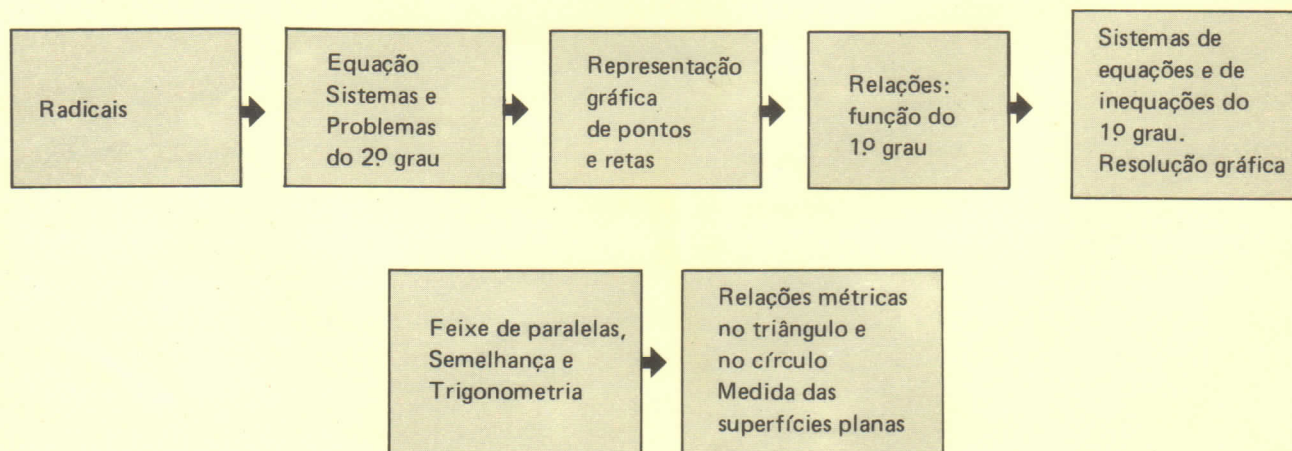
- **Ser um auxiliar do professor** – Com a intenção de atender a esta finalidade, a estrutura do livro foi organizada de modo a apresentar a parte teórica de maneira simples, clara e objetiva para, a seguir, explorar exaustivamente essa teoria através de exercícios que vão introduzindo paulatinamente as dificuldades comuns aos nossos alunos. Isso permite uma real fixação dos assuntos estudados.

OBJETIVO DESTE LIVRO

O objetivo deste livro é continuar o estudo da **Álgebra** e da **Geometria**, que foi iniciado na 7ª série.

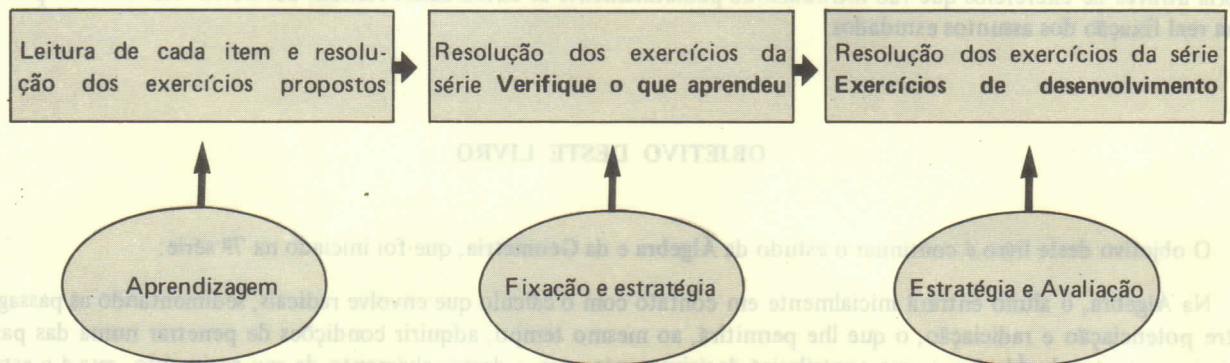
Na **Álgebra**, o aluno entrará inicialmente em contato com o cálculo que envolve radicais, sedimentando as passagens entre potenciação e radiciação, o que lhe permitirá, ao mesmo tempo, adquirir condições de penetrar numa das partes mais importantes da Álgebra e que contribuirá decisivamente para o desenvolvimento de seu raciocínio, que é o estudo mais aprofundado das equações, dos sistemas e dos problemas. Dominando esta parte, o aluno estará capacitado a iniciar a abordagem da representação gráfica de pontos e, em seguida, a penetrar no campo das relações e funções, adquirindo assim os conhecimentos necessários para a seqüência do seu estudo no Segundo Grau.

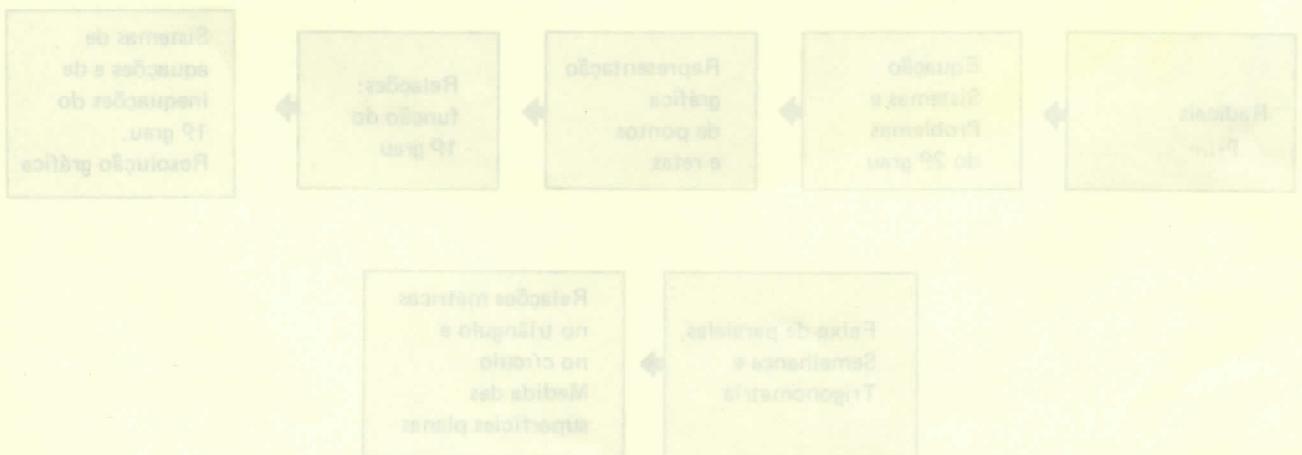
Na Geometria, dá-se continuidade ao trabalho feito na 7ª série, de modo que inicialmente é desenvolvido o estudo da proporcionalidade de segmentos, com o que o aluno é preparado para poder entrar no campo das relações métricas no triângulo e no círculo, bem como no estudo da medida das superfícies planas, fazendo-se desta maneira uma verdadeira associação entre Álgebra e Geometria.

Simplificadamente, a seqüência lógica proposta neste livro pode ser visualizada da seguinte maneira:

ESTRUTURA DESTE LIVRO

No sentido de alcançar o objetivo mencionado, todos os itens de cada unidade são seguidos de um grande número de exercícios, que o aluno deverá fazer no próprio livro, sob a orientação do professor. A isso denominamos **fase de aprendizagem**. Para reforçá-la é introduzida, após um determinado número de itens, uma série de exercícios com o nome de **Verifique o que aprendeu**, que constitui a **fase de fixação**. Esta série deve ser aproveitada pelo professor como estratégia para atingir os objetivos propostos.

No final de cada unidade existe uma série de exercícios denominada **Exercícios de desenvolvimento**. Sua finalidade é desenvolver aquilo que o aluno já aprendeu e fixou. Esta série poderá ser feita em classe ou em casa, dependendo do critério do professor. Por outro lado, ela se presta como material de avaliação da aprendizagem ou como estratégia para atingir os objetivos específicos da unidade.

De maneira esquemática, assim pode ser visualizada a seqüência dos diversos passos que formam a estrutura de cada unidade:

Esperamos com isso prestar uma modesta ajuda aos professores que se dedicam ao importante trabalho de ensino da Matemática. E no sentido de aperfeiçoar cada vez mais esta obra, queremos contar sempre com suas críticas e sugestões.

Os autores

ANTÔNIO SARDELLA • EDISON DA MATTA

MATEMÁTICA

8ª SÉRIE PRIMEIRO GRAU

DE ACORDO COM O GUIA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO

O PLANEJAMENTO DE CURSO, AS SUGESTÕES DIDÁTICAS E AS RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS NÃO CONSTAM NO LIVRO DO ALUNO.

Caro Aluno

Você chegou à oitava série, última etapa para a conclusão do Primeiro Grau.

Nesta fase dos seus estudos, deve ter reparado que o caminho é bem mais fácil do que imaginava. Avançando passo a passo, as dificuldades foram sendo vencidas, os conhecimentos se somando, e o resultado está aí: você se encontra às portas do Segundo Grau.

Esperamos que, com a orientação do professor, tenha realmente aproveitado os livros anteriores. Depois de completado o da 8.ª série, você terá adquirido os conhecimentos básicos de Matemática, a partir dos quais poderá prosseguir seus estudos, além de contar com uma bagagem de conhecimentos muito úteis para sua vida prática. Você deve ter percebido como o edifício da Matemática vai sendo construído numa seqüência lógica e rigorosa, e verá, no final deste ano letivo, como seu conjunto é harmonioso e fascinante.

Desejamos que este livro seja útil para que você possa não apenas concluir com êxito o Primeiro Grau, como também prosseguir seus estudos numa fase posterior.

Bom trabalho!

Os Autores

ÍNDICE

Unidade 1

ESTUDO DOS RADICAIS

A RADIAÇÃO

A radiciação é uma operação que você já estudou; sabe, portanto, que ela é o inverso da potenciação. Veja:

$\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$.

$\sqrt{16} = 4$ porque $4^2 = 16$.

$\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$.

$\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 81$.

Agora complete:

1) $\sqrt{64} =$ 8 porque (8)$^2 = 64$.

2) $\sqrt[3]{64} =$ 4 porque $(4)^{3} =$ 64.

3) $\sqrt[6]{64} =$ 2 porque $(2)^{6} =$ 64.

4) $\sqrt[3]{125} = 5$ porque $(5)^{3} =$ 125.

5) $\sqrt[7]{128} =$ 2 porque $(2)^{7} =$ 128.

6) $\sqrt[6]{729} =$ 3 porque $(3)^{6} =$ 729.

7) $\sqrt[4]{1\,296} =$ 6 porque $(6)^{4} =$ 1 296.

8) $\sqrt[3]{x^6} =$ x^2 porque $(x^2)^{3} =$ x^6.

A LEITURA

Considere a sentença: $\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$.

Pois bem, conforme a operação, temos:

Radiciação	Potenciação	Observação
$\sqrt[n]{a} = b$ (n: índice; a: radicando; b: raiz) e ainda: $\sqrt{\ }$: sinal do radical $\sqrt[n]{a}$: radical	$b^n = a$ (n: expoente; b: base; a: potência)	• Quando o índice do radical é igual a 1, a raiz é igual ao radicando. $\sqrt[1]{2} = 2$ porque $2^1 = 2$. $\sqrt[1]{13} = 13$ porque $13^1 = 13$. • Quando o índice do radical é igual a 2, ele é subentendido. $\sqrt{4} = 2$ significa $\sqrt[2]{4} = 2$ porque $2^2 = 4$.

EXERCÍCIOS

a) Complete adequadamente:

1) $5^3 = 125$
base: 5
expoente: 3
potência: 125

2) $\sqrt[3]{8} = 2$
índice: 3
radicando: 8
raiz: 2

3) $\sqrt[4]{16} = 2$
índice: 4
radicando: 16
raiz: 2

4) $\sqrt{144} = 12$
índice: 2
radicando: 144
raiz: 12

b) Complete os blocos:

Bloco 1

Radiciação	Radical	Índice	Radicando	Raiz
$\sqrt[6]{729} = 3$	$\sqrt[6]{729}$	6	729	3
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{64}$	3	64	4
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{100}$	2	100	10
$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{343}$	3	343	7
$\sqrt[4]{81} = 3$	$\sqrt[4]{81}$	4	81	3
$\sqrt[5]{243} = 3$	$\sqrt[5]{243}$	5	243	3

Bloco 2

Potenciação	Base	Expoente	Potência
$2^5 = 32$	2	5	32
$3^4 = 81$	3	4	81
$6^2 = 36$	6	2	36
$5^2 = 25$	5	2	25
$15^1 = 15$	15	1	15
$3^3 = 27$	3	3	27

A leitura do radical é feita de acordo com o índice.

Veja:

$\sqrt[1]{12}$ lê-se: raiz primeira de doze.

$\sqrt{16}$ lê-se: raiz quadrada de dezesseis.

$\sqrt[3]{8}$ lê-se: raiz cúbica de oito.

$\sqrt[4]{5}$ lê-se: raiz quarta de cinco.

$\sqrt[5]{2}$ lê-se: raiz quinta de dois.

$\sqrt[6]{10}$ lê-se: raiz sexta de dez.

Dê a leitura de:

1) $\sqrt{9}$: raiz quadrada de nove

2) $\sqrt[6]{12}$: raiz sexta de doze

3) $\sqrt[8]{10}$: raiz oitava de dez

4) $\sqrt[3]{27}$: raiz cúbica de vinte e sete

5) $\sqrt{3}$: raiz quadrada de três

6) $\sqrt[10]{4}$: raiz décima de quatro

7) $\sqrt[3]{80}$: raiz cúbica de oitenta

8) $\sqrt{15}$: raiz quadrada de quinze

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete corretamente:

1) $\sqrt[1]{12} = 12$ porque $(12)^1 = 12$.

2) $\sqrt{121} = 11$ porque $(11)^2 = 121$.

3) $\sqrt[3]{216} = 6$ porque $(6)^3 = 216$.

4) $\sqrt{225} = 15$ porque $(15)^2 = 225$.

5) $\sqrt{169} = 13$ porque $(13)^2 = 169$.

6) $\sqrt[8]{1} = 1$ porque $(1)^8 = 1$.

7) $\sqrt[6]{64} =$ 2 porque $(2)^{6} =$ 64.

8) $\sqrt[3]{a^6} = a^2$ porque $(a^2)^3 = a^6$.

9) $\sqrt[1]{8} = 8$
índice: 1
radicando: 8
raiz: 8
radical: $\sqrt[1]{8}$

10) $\sqrt{324} = 18$
índice: 2
radicando: 324
raiz: 18
radical: $\sqrt{324}$

11) $\sqrt[3]{1\,000} = 10$
índice: 3
radicando: 1 000
raiz: 10
radical: $\sqrt[3]{1000}$

12) $\sqrt[8]{256} = 2$
índice: 8
radicando: 256
raiz: 2
radical: $\sqrt[8]{256}$

b) Dê a leitura:

1) $\sqrt[9]{9}$: raiz nona de nove

2) $\sqrt[3]{x}$: raiz cúbica de x

3) $\sqrt[4]{20}$: raiz quarta de vinte

4) $\sqrt[5]{7}$: raiz quinta de sete

5) $\sqrt{4}$: raiz quadrada de quatro

6) $\sqrt[1]{100}$: raiz primeira de cem

RAIZ QUADRADA: A EXTRAÇÃO

Você já aprendeu a extrair a raiz quadrada exata através de um dispositivo prático. Agora, utilizando esse dispositivo, vamos aprender a extrair a raiz quadrada com aproximação.

Estudaremos os seguintes casos:

1º caso: O radicando é um número inteiro. – Para obter a raiz quadrada com aproximação de 0,1, 0,01, 0,001, etc., acrescenta-se ao radicando uma quantidade de zeros sempre correspondente ao dobro do número de casas decimais que se pretende ter na raiz. Vamos deixar isso mais claro através de um exemplo:

Como determinar $\sqrt{125}$ com aproximação de 0,1 por falta?

$\overset{0,1}{\sqrt{125}} \sim$? (A raiz quadrada deve ter uma casa decimal.)

Veja:

Então: $\overset{0,1}{\sqrt{125}} \sim 11,1$
resto $= 1,79$

Prova: $11,1^2 + 1,79 \overset{?}{=} 125$
$123,21 + 1,79 = 125$
$125,00 = 125$ (V)

Agora vamos determinar $\sqrt{32}$ com aproximação de 0,01 por falta.

$\overset{0,01}{\sqrt{32}} \sim$? (A raiz quadrada deve ter duas casas decimais.)

1ª casa decimal   2ª casa decimal

$\sqrt{32\ 00\ 00}$ | 565
−25 | $106 \times 6 = 636$
700 | $1125 \times 5 = 5625$
−636
6400
−5625
0775

O resto deve ter o dobro de casas decimais que se pretende ter na raiz.

Então: $\overset{0,01}{\sqrt{32}} \sim 5,65$
resto $= 0,0775$

Prova: $5,65^2 + 0,0775 \overset{?}{=} 32$
$31,9225 + 0,0775 = 32$
$32,0000 = 32$ (V)

EXERCÍCIOS

a) Determine a raiz quadrada com aproximação por falta a menos de 0,1:

1) $\sqrt{8\ 00}$ — 28; $48 \times 8 = 384$; -4, 400, -384, 016

Prova: $2,8^2 + 0,16 = 8$
$7,84 + 0,16 = 8$
$8,00 = 8$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{8} \sim \underline{2,8}$

2) $\sqrt{12\ 00}$ — 34; $64 \times 4 = 256$; -9, 300, -256, 044

Prova: $3,4^2 + 0,44 = 12$
$11,56 + 0,44 = 12$
$12,00 = 12$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{12} \sim \underline{3,4}$

3) $\sqrt{42\ 00}$ — 64; $124 \times 4 = 496$; -36, 600, -496, 104

Prova: $6,4^2 + 1,04 = 42$
$40,96 + 1,04 = 42$
$42,00 = 42$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{42} \sim \underline{6,4}$

4) $\sqrt{1\ 54\ 00}$ — 124; $22 \times 2 = 44$; $244 \times 4 = 976$; -1, 054, -44, 1000, -976, 024

Prova: $12,4^2 + 0,24 = 154$
$153,76 + 0,24 = 154$
$154,00 = 154$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{154} \sim \underline{12,4}$

5) $\sqrt{6\ 50\ 00}$ — 254; $45 \times 5 = 225$; $504 \times 4 = 2016$; -4, 250, -225, 2500, -2016, 0484

Prova: $25,4^2 + 4,84 = 650$
$645,16 + 4,84 = 650$
$650,00 = 650$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{650} \sim \underline{25,4}$

6) $\sqrt{12\ 35\ 00}$ — 351; $65 \times 5 = 325$; $701 \times 1 = 701$; -9, 335, -325, 1000, -701, 299

Prova: $35,1^2 + 2,99 = 1235$
$1232,01 + 2,99 = 1235$
$1235,00 = 1235$ (V)

Logo: $\sqrt[0,1]{1\ 235} \sim \underline{35,1}$

b) Determine a raiz quadrada por falta a menos de 0,01:

1) $\sqrt{7\ 00\ 00}$ — 264; $46 \times 6 = 276$; $524 \times 4 = 2096$; -4, 300, -276, 2400, -2096, 0304

Prova: $2,64^2 + 0,0304 = 7$
$6,9696 + 0,0304 = 7$
$7,0000 = 7$ (V)

Logo: $\sqrt[0,01]{7} \sim \underline{2,64}$

2) $\sqrt{96\ 00\ 00}$ — 979; $187 \times 7 = 1309$; $1949 \times 9 = 17541$; -81, 1500, -1309, 19100, -17541, 01559

Prova: $9,79^2 + 0,1559 = 96$
$95,8441 + 0,1559 = 96$
$96,0000 = 96$ (V)

Logo: $\sqrt[0,01]{96} \sim \underline{9,79}$

3) $\sqrt{75\ 00\ 00}$ — 866; $166 \times 6 = 996$; $1726 \times 6 = 10356$; -64, 1100, -996, 10400, -10356, 00044

Prova: $8,66^2 + 0,0044 = 75$
$74,9956 + 0,0044 = 75$
$75,0000 = 75$ (V)

Logo: $\sqrt[0,01]{75} \sim \underline{8,66}$

2º caso: O radicando é expresso por um numeral decimal.

Vamos recordar:

$(0{,}2)^2 = 0{,}04$, então $\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$ (2 casas decimais → 1 casa decimal)

> Note que a raiz tem sempre a metade de algarismos decimais do radicando.

$(0{,}05)^2 = 0{,}0025$, então $\sqrt{0{,}0025} = 0{,}05$ (4 casas decimais → 2 casas decimais)

Antes de extrair a raiz quadrada, observe se a quantidade de algarismos decimais é **par**; se não for, acrescente **um zero** à direita e proceda como se fosse um número inteiro.

Veja:

$\sqrt{0{,}68} = ?$ — 2 casas decimais (par)

Então: $\sqrt{0{,}68}$ | 0,8

-0 | 08 × 8 = 64
068
-64
004

Logo: $\sqrt{0{,}68} \sim 0{,}8$
resto = 0,04

$\sqrt{1{,}253} = ?$ — 3 casas decimais (ímpar)

Então: $\sqrt{1{,}25\ 30}$ | 1,11

-1 | 21 × 1 = 21
025 | 221 × 1 = 221
-21
430
-221
209

Logo: $\sqrt{1{,}253} \sim 1{,}11$
resto = 0,0209

VAMOS EXERCITAR

Extraia a raiz quadrada dos números:

1) $\sqrt{0{,}45}$ | 0,6
-0 | 06 × 6 = 36
045
-36
09

$\sqrt{0{,}45} \sim$ 0,6
resto = 0,09

2) $\sqrt{3{,}15\ 40}$ | 1,77
-1 | 27 × 7 = 189
215 | 347 × 7 = 2429
-189
2640
-2429
0211

$\sqrt{3{,}154} \sim$ 1,77
resto = 0,0211

3) $\sqrt{12{,}83\ 20}$ | 3,58
-9 | 65 × 5 = 325
383 | 708 × 8 = 5664
-325
5820
-5664
0156

$\sqrt{12{,}832} \sim$ 3,58
resto = 0,0156

Preste atenção nos exemplos que seguem:

Extração da raiz quadrada de 0,7 com aproximação por falta a menos de 0,1.

$\overset{0{,}1}{\sqrt{0{,}7}} \sim ?$

$\sqrt{0{,}\ 70}$ | 0,8
-0 | 08 × 8 = 64
070
-64
06

Então: $\overset{0{,}1}{\sqrt{0{,}7}} \sim 0{,}8$
resto = 0,06

Prova: $0{,}8^2 + 0{,}06 \overset{?}{=} 0{,}7$
$0{,}64 + 0{,}06 = 0{,}7$
$0{,}70 = 0{,}7$ (V)

Extração da raiz quadrada de 1,4 com aproximação por falta a menos de 0,01.

$\sqrt[0,01]{1,4} \sim ?$

$\sqrt{1,\ 40\ 00}$	1,18
−1	21 × 1 = 21
040	228 × 8 = 1824
−21	
1900	
−1824	
0076	

Então: $\sqrt[0,01]{1,4} \sim 1,18$

resto = 0,0076

Prova: $1,18^2 + 0,0076 \overset{?}{=} 1,4$

$1,3924 + 0,0076 = 1,4$

$1,4000 = 1,4$ (V)

AGORA FAÇA VOCÊ

a) Extraia a raiz quadrada com aproximação por falta a menos de 0,1:

1) $\sqrt{0,\ 50}$ | 0,7 — 07 × 7 = 49; −0, 050, −49, 01

Então: $\sqrt[0,1]{0,5} \sim$ 0,7

2) $\sqrt{2,\ 30}$ | 1,5 — 25 × 5 = 125; −1, 130, −125, 005

Então: $\sqrt[0,1]{2,3} \sim$ 1,5

3) $\sqrt{12,\ 60}$ | 3,5 — 65 × 5 = 325; −9, 360, −325, 035

Então: $\sqrt[0,1]{12,6} \sim$ 3,5

b) Extraia a raiz quadrada com aproximação por falta a menos de 0,01:

1) $\sqrt{1,\ 50\ 00}$ | 1,22 — 22 × 2 = 44; 242 × 2 = 484; −1, 050, −44, 600, −484, 116

Então: $\sqrt[0,01]{1,5} \sim$ 1,22

2) $\sqrt{3,\ 42\ 00}$ | 1,84 — 28 × 8 = 224; 364 × 4 = 1456; −1, 242, −224, 1800, −1456, 0344

Então: $\sqrt[0,01]{3,42} \sim$ 1,84

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Extraia a raiz quadrada por falta a menos de 0,1:

1) 10 (3,6)
2) 35 (5,9)
3) 78 (8,8)
4) 118 (10,8)
5) 1 340 (36,6)
6) 2 673 (51,7)
7) 5 318 (72,9)
8) 13 172 (114,7)
9) 1,8 (1,3)
10) 3,16 (1,7)
11) 14,3 (3,7)
12) 8,37 (2,8)

b) Extraia a raiz quadrada por falta a menos de 0,01:

1) 17 (4,12)
2) 44 (6,63)
3) 105 (10,24)
4) 476 (21,81)
5) 6,15 (2,47)
6) 9,21 (3,03)
7) 13,4 (3,66)
8) 31,123 (5,57)
9) 0,19 (0,43)
10) 4,031 (2,00)

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Efetue as operações, dando o resultado com aproximação por falta a menos de 0,1:

1) $2,5 + \sqrt{2} =$ 3,9
2) $3 - \sqrt{3} =$ 1,3
3) $\sqrt{8} - 1,2 =$ 1,6
4) $\sqrt{12} - 0,6 =$ 2,8
5) $\sqrt{8} - \sqrt{2} =$ 1,4
6) $\sqrt{12} + \sqrt{3} =$ 5,1

ALGUMAS PROPRIEDADES DOS RADICAIS

1ª propriedade: Conversão de radical de um produto em um produto de radicais.

Observe:

$$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16}$$

$$\sqrt{64} = 8 \qquad 2 \cdot 4 = 8$$

Então: $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

2ª propriedade: Conversão de radical de um quociente em quociente de radicais.

$$\sqrt{\frac{16}{4}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$$

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \frac{4}{2} = 2$$

Então: $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

VAMOS EXERCITAR

a) Converta em um produto de radicais:

1) $\sqrt{3 \cdot 5} =$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
2) $\sqrt{8 \cdot 6} =$ $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6}$
3) $\sqrt[3]{2 \cdot 7} =$ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7}$
4) $\sqrt[3]{12 \cdot 5 \cdot 7} =$ $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7}$
5) $\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 5} =$ $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5}$
6) $\sqrt{9 \cdot 25} =$ $\sqrt{9} \cdot \sqrt{25}$
7) $\sqrt[5]{6 \cdot 10} =$ $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{10}$
8) $\sqrt[6]{a \cdot b \cdot c} =$ $\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[6]{b} \cdot \sqrt[6]{c}$
9) $\sqrt{x \cdot y \cdot z} =$ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{z}$

b) Converta em radical de um produto:

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{11} =$ $\sqrt{5 \cdot 11}$
2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} =$ $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5}$
3) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} =$ $\sqrt[3]{4 \cdot 2}$
4) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} =$ $\sqrt[3]{3 \cdot 5 \cdot 7}$
5) $\sqrt[4]{10} \cdot \sqrt[4]{5} =$ $\sqrt[4]{10 \cdot 5}$
6) $\sqrt[5]{10} \cdot \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} =$ $\sqrt[5]{10 \cdot 2 \cdot 3}$
7) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} =$ $\sqrt[3]{a \cdot x}$
8) $\sqrt{m} \cdot \sqrt{n} =$ $\sqrt{m \cdot n}$
9) $\sqrt{p} \cdot \sqrt{q} \cdot \sqrt{r} =$ $\sqrt{p \cdot q \cdot r}$

c) Converta em um quociente de radicais:

1) $\sqrt{\frac{4}{5}} =$ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}}$
2) $\sqrt[3]{\frac{7}{15}} =$ $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{15}}$
3) $\sqrt[3]{\frac{20}{17}} =$ $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{17}}$
4) $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} =$ $\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}}$
5) $\sqrt{7 : 8} =$ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$
6) $\sqrt{\frac{a}{b}} =$ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
7) $\sqrt[10]{\frac{x}{y}} =$ $\frac{\sqrt[10]{x}}{\sqrt[10]{y}}$
8) $\sqrt[5]{\frac{32}{15}} =$ $\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{15}}$
9) $\sqrt[4]{\frac{ab}{x}} =$ $\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{x}}$

d) Converta em radical de um quociente:

1) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\dfrac{9}{5}}$ 3) $\dfrac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{y}} = \sqrt[5]{\dfrac{x}{y}}$ 5) $\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^2}{3^2}}$

2) $\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\dfrac{13}{7}}$ 4) $\dfrac{\sqrt[8]{2}}{\sqrt[8]{5}} = \sqrt[8]{\dfrac{2}{5}}$ 6) $\dfrac{\sqrt[4]{m^3}}{\sqrt[4]{n}} = \sqrt[4]{\dfrac{m^3}{n}}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Com base nas propriedades estudadas, mostre que:

$\sqrt{\dfrac{a \cdot b \cdot c}{x}}$ é igual a $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}}{\sqrt{x}}$

3ª propriedade: A extração.

Observe:

$\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3 = 64$

$\sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2$

Então: $\sqrt[n]{x^y} = x^{\frac{y}{n}}$

4ª propriedade: A simplificação.

Observe:

$\sqrt[4]{64} = \sqrt{8}$

$\sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3}$

Perceba que o índice e o expoente da potência que constitui o radicando são divididos pelo mesmo número.

VAMOS EXERCITAR

a) Extraia a raiz:

1) $\sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}}$ 4) $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{5}} = 2^3$ 7) $\sqrt[3]{5^9} = 5^{\frac{9}{3}} = 5^3$ 10) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$

2) $\sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2$ 5) $\sqrt[4]{2^{20}} = 2^{\frac{20}{4}} = 2^5$ 8) $\sqrt{11^8} = 11^{\frac{8}{2}} = 11^4$ 11) $\sqrt[9]{9^2} = 9^{\frac{2}{9}}$

3) $\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3$ 6) $\sqrt[6]{7^{18}} = 7^{\frac{18}{6}} = 7^3$ 9) $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ 12) $\sqrt[5]{6^3} = 6^{\frac{3}{5}}$

b) Decompondo o radicando em fatores primos, extraia a raiz:

1) $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$ 5) $\sqrt{729} = \sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3$ 9) $\sqrt{81} = \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2$

2) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2$ 6) $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^{\frac{8}{2}} = 2^4$ 10) $\sqrt[3]{1\,000} = \sqrt[3]{10^3} = 10^{\frac{3}{3}} = 10$

3) $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$ 7) $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2$ 11) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$

4) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3^{\frac{4}{4}} = 3$ 8) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2^{\frac{5}{5}} = 2$ 12) $\sqrt[8]{32} = \sqrt[8]{2^5} = 2^{\frac{5}{8}}$

c) Simplifique os radicais:

1) $\sqrt[4]{3^6} = \sqrt{3^3}$ 4) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ 7) $\sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$ 10) $\sqrt[9]{x^3} = \sqrt[3]{x}$

2) $\sqrt[10]{2^{15}} = \sqrt{2^3}$ 5) $\sqrt[12]{a^{15}} = \sqrt[4]{a^5}$ 8) $\sqrt[8]{13^2} = \sqrt[4]{13}$ 11) $\sqrt[16]{3^{20}} = \sqrt[4]{3^5}$

3) $\sqrt[6]{5^9} = \sqrt{5^3}$ 6) $\sqrt[12]{x^{18}} = \sqrt{x^3}$ 9) $\sqrt[8]{2^4} = \sqrt{2}$ 12) $\sqrt[15]{10^3} = \sqrt[5]{10}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Extraia a raiz:

1) $\sqrt[4]{2^7} =$ ____ 4) $\sqrt[4]{a^8} =$ ____ 7) $\sqrt[3]{x^6y^9} =$ ____ 10) $\sqrt{1\,296} =$ ____

2) $\sqrt[5]{6^3} =$ ____ 5) $\sqrt{\dfrac{a^6}{b^4}} =$ ____ 8) $\sqrt[6]{a^{18}b^{24}} =$ ____ 11) $\sqrt{2\,025} =$ ____

3) $\sqrt[3]{x^{12}} =$ ____ 6) $\sqrt{\dfrac{m^2}{n^4}} =$ ____ 9) $\sqrt[3]{343} =$ ____ 12) $\sqrt[4]{625} =$ ____

b) Escreva os numerais na forma de radical:

1) $2^{\frac{1}{3}} =$ ____ 4) $a^{\frac{4}{5}} =$ ____ 7) $5^{\frac{5}{6}} =$ ____ 10) $m^{\frac{1}{4}} =$ ____

2) $3^{\frac{3}{4}} =$ ____ 5) $10^{\frac{1}{5}} =$ ____ 8) $(ab)^{\frac{1}{6}} =$ ____ 11) $10^{\frac{1}{2}} =$ ____

3) $7^{\frac{2}{3}} =$ ____ 6) $13^{\frac{2}{7}} =$ ____ 9) $x^{\frac{7}{10}} =$ ____ 12) $6^{\frac{1}{2}} =$ ____

c) Simplifique os radicais:

1) $\sqrt[9]{7^6} =$ ____ 5) $\sqrt[12]{x^6 \cdot y^9} =$ ____ 9) $\sqrt[10]{32} =$ ____

2) $\sqrt[14]{2^{21}} =$ ____ 6) $\sqrt[20]{\dfrac{2^{10}}{3^{15}}} =$ ____ 10) $\sqrt[9]{\dfrac{8}{27}} =$ ____

3) $\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^9} =$ ____ 7) $\sqrt[4]{\dfrac{x^6}{y^8}} =$ ____ 11) $\sqrt[18]{729} =$ ____

4) $\sqrt[8]{2^4 \cdot 3^{20}} =$ ____ 8) $\sqrt[6]{\dfrac{2^{12} \cdot 3^6}{5^3}} =$ ____ 12) $\sqrt[6]{169} =$ ____

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Prove que os numerais representam o mesmo número real:

1) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ e $\sqrt[6]{32}$ 3) $2^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{1}{6}}$ e $\sqrt{2}$ 5) $2^{-\frac{1}{2}}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

2) $3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ e $\sqrt{243}$ 4) $2^2 : 2^{\frac{1}{4}}$ e $\sqrt[4]{128}$ 6) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$ e $\sqrt[5]{27}$

AS OPERAÇÕES

Estudaremos as seguintes operações envolvendo radicais:

- Adição e subtração
- Multiplicação e divisão
- Potenciação e radiciação

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Antes de efetuarmos estas operações, você precisa conhecer o seguinte:

- **Como extrair um fator do radicando**

$$\sqrt[3]{2^6 \cdot 5} = \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{5} = 2^{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[3]{5} = 2^2 \cdot \sqrt[3]{5} = 4\sqrt[3]{5}$$

extração

$$\sqrt[4]{144} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3^2} = \sqrt[4]{2^4} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2^{\frac{4}{4}} \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2 \cdot \sqrt[4]{3^2} = 2\sqrt{3}$$

extração — simplificação

144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

então: $144 = 2^4 \cdot 3^2$

AGORA FAÇA VOCÊ

a) Extraia do radicando os possíveis fatores:

1) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3} = 2^3\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3}$

2) $\sqrt{2^4 \cdot 5} = 2^2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

3) $\sqrt{3^8 \cdot 7} = 3^4\sqrt{7} = 81\sqrt{7}$

4) $\sqrt[4]{5^8 \cdot 7^2} = 5^2\sqrt[4]{7^2} = 25\sqrt{7}$

5) $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3 \cdot \sqrt[5]{5} = 12\sqrt[5]{5}$

6) $\sqrt[3]{x^6 \cdot y^2} = x^2\sqrt[3]{y^2}$

7) $\sqrt[3]{\frac{2}{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{5}$

8) $\sqrt{\frac{3}{5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

9) $\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

10) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$

11) $\sqrt{90} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$

12) $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = 2\sqrt[3]{5}$

13) $\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$

14) $\sqrt[5]{96} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3} = 2\sqrt[5]{3}$

15) $\sqrt[4]{162} = \sqrt[4]{2 \cdot 3^4} = 3\sqrt[4]{2}$

16) $\sqrt[3]{192} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3} = 4\sqrt[3]{3}$

b) Preparando o radicando, extraia os possíveis fatores:

1) $\sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{2^2}$

2) $\sqrt[3]{3^7} = \sqrt[3]{3^6 \cdot 3} = \sqrt[3]{3^6} \cdot \sqrt[3]{2} \quad 9\sqrt[3]{2}$

3) $\sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

4) $\sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

5) $\sqrt{3^5 \cdot 5^3} = \sqrt{3^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 5} = 3^2 \cdot 5\sqrt{3 \cdot 5} = 45\sqrt{15}$

6) $\sqrt[4]{x^7 \cdot y^{10}} = \sqrt[4]{x^4 \cdot x^3 \cdot y^8 \cdot y^2} = xy^2\sqrt[4]{x^3y^2}$

7) $\sqrt[3]{a^{10} \cdot b^5} = \sqrt[3]{a^9 \cdot a \cdot b^3 \cdot b^2} = a^3b\sqrt[3]{ab^2}$

8) $\sqrt[5]{2^6 \cdot 3^8} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 2 \cdot 3^5 \cdot 3^3} = 6\sqrt[5]{2 \cdot 3^3}$

9) $\sqrt[3]{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^7} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot 5^2\sqrt[3]{2^2 \cdot 3 \cdot 5}$

10) $\sqrt{2^7 \cdot 3^3} = \sqrt{2^6 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot 3} = 2^3 \cdot 3\sqrt{2 \cdot 3}$

11) $\sqrt{\frac{x^3 \cdot y^5}{2^2}} = \sqrt{\frac{x^2 \cdot x \cdot y^4 \cdot y}{2^2}} = \frac{x \cdot y^2}{2}\sqrt{xy}$

12) $\sqrt[6]{2^7 \cdot 3^8} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2 \cdot 3^6 \cdot 3^2} = 2 \cdot 3\sqrt[6]{2 \cdot 3^2}$

- **Como introduzir um fator no radicando**

Veja o exemplo:

Dado $2\sqrt[3]{5}$, introduza no radicando o fator 2.

Resolução:

Deve-se escrever o fator no radicando, porém com um expoente igual ao índice do radical.

$$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

VAMOS EXERCITAR

Introduza os fatores externos no radicando:

1) $3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$

2) $2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$

3) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50}$

4) $x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$

5) $\frac{2}{3}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2} \cdot 5} = \sqrt{\frac{20}{9}}$

6) $2\sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 10} = \sqrt[4]{160}$

7) $2^2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 5} = \sqrt[3]{320}$

8) $m\sqrt{x} = \sqrt{m^2x}$

9) $\frac{m}{n}\sqrt[4]{\frac{x}{y}} = \sqrt[4]{\frac{m^4x}{n^4y}}$

10) $a^2b\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{a^8b^4x^3}$

- **Os radicais semelhantes**

Dois ou mais radicais são semelhantes quando apresentam o mesmo índice e o mesmo radicando.

Exemplos:

$3\sqrt{5}$ e $2\sqrt{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$ e $-2\sqrt[3]{2}$

- **Analise os radicais e, se forem semelhantes, coloque S nos parênteses:**

1) $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (S)

2) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{5}$ e $3\sqrt{5}$ ( )

3) $2\sqrt[4]{2}$, $3\sqrt[4]{2^2}$ e $-\sqrt[4]{4}$ ( )

4) $3\sqrt[4]{8}$, $2\sqrt[4]{2^3}$ e $\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$ (S)

5) $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$ e $c\sqrt{2}$ (S)

6) $\frac{2}{5}\sqrt[5]{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt[5]{3}$ e $-3\sqrt[5]{3}$ (S)

Agora estamos em condições de efetuar adição e subtração envolvendo radicais.
Observe com atenção o quadro:

Utilizando a extração		Utilizando os radicais semelhantes
1.º caso: As raízes são exatas.	**2.º caso:** As raízes são aproximadas.	**3.º caso:** Os radicais se reduzem a um único termo.
Observe: 1) $\sqrt{9} + \sqrt{16} - \sqrt{25} = ?$ $3 + 4 - 5 = 2$ 2) $\sqrt[4]{256} + \sqrt[3]{8} - \sqrt{4} = ?$ $\sqrt[4]{2^8} + \sqrt[3]{2^3} - 2 = ?$ $2^2 + 2 - 2 = 4$	Observe: 1) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} = ?$ $2{,}2 - 1{,}7 + 1{,}4 = 1{,}9$ 2) $2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} = ?$ $2 + 1{,}7 - 1{,}4 = 2{,}3$	Observe: 1) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ $3 + 5 = 8$ 2) $4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ $4 - 2 + 4 = 6$

a) Encontre a soma (as raízes são exatas):

1) $\sqrt{4} + \sqrt{1} = 2 + 1 = 3$

2) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$

3) $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$

4) $\sqrt{81} - \sqrt{49} + \sqrt{36} = 9 - 7 + 6 = 8$

5) $\sqrt{169} - \sqrt{100} = 13 - 10 = 3$

6) $\sqrt[3]{8} + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$

7) $\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{27} = 4 - 3 = 1$

8) $\sqrt[5]{32} - \sqrt{9} = 2 - 3 = -1$

9) $\sqrt{144} - 3 = 12 - 3 = 9$

10) $\sqrt[3]{125} + \sqrt{64} = 5 + 8 = 13$

11) $2\sqrt{4} + 3\sqrt{9} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13$

12) $4\sqrt{16} - 5\sqrt{4} = 4 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 6$

13) $2\sqrt{64} - \sqrt{36} = 2 \cdot 8 - 6 = 10$

14) $5\sqrt[3]{8} - 2\sqrt[4]{16} = 5 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 6$

15) $\frac{\sqrt{100}}{2} + \frac{\sqrt{9}}{3} - \sqrt{36} = \frac{10}{2} + \frac{3}{3} - 6 = 0$

b) Encontre a soma (com aproximação por falta a menos de 0,1):

1) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3,1$

2) $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 0,8$

3) $\sqrt{10} + \sqrt{8} - \sqrt{5} = 3,7$

4) $\sqrt{12} + \sqrt{7} - 1 = 5,0$

5) $1 + \sqrt{8} = 3,8$

6) $3 - \sqrt{5} = 0,8$

c) Reduza os radicais semelhantes:

1) $2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

2) $5\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{2}$

3) $6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 4\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

4) $2\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 3\sqrt{7}$

5) $\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

6) $7\sqrt{10} - 8\sqrt{10} = -\sqrt{10}$

7) $\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

8) $8\sqrt[3]{5} - 3\sqrt[3]{5} = 5\sqrt[3]{5}$

9) $3\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} - 4\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2}$

10) $\sqrt{11} - 5\sqrt{11} + 2\sqrt{11} = -2\sqrt{11}$

11) $8\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} = \sqrt{x}$

12) $\sqrt{m} + \sqrt{m} + 3\sqrt{m} = 5\sqrt{m}$

13) $2\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} - 5\sqrt[3]{a} = -2\sqrt[3]{a}$

14) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

15) $\frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = -\sqrt{5}$

d) Encontre o numeral mais simples que represente a expressão:

1) $\sqrt{45} + \sqrt{80} = 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 7\sqrt{5}$

$\sqrt{45} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$

$\sqrt{80} = \sqrt{2^4 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$

2) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

3) $\sqrt{27} + \sqrt{192} - \sqrt{300} = 3\sqrt{3} + 8\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = \sqrt{3}$

$\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{192} = \sqrt{2^6 \cdot 3} = 8\sqrt{3}$

$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2} = 10\sqrt{3}$

4) $\sqrt{4a^3} - \sqrt{9a^3} + \sqrt{16a^3} = 2a\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} + 4a\sqrt{a} = 3a\sqrt{a}$

$\sqrt{4a^3} = \sqrt{4a^2 \cdot a} = 2a\sqrt{a}$

$\sqrt{9a^3} = \sqrt{9a^2 \cdot a} = 3a\sqrt{a}$

$\sqrt{16a^3} = \sqrt{16a^2 \cdot a} = 4a\sqrt{a}$

5) $\sqrt{252} + \sqrt{63} + \sqrt{567} = 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} + 9\sqrt{7} = 18\sqrt{7}$

$\sqrt{252} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = 6\sqrt{7}$

$\sqrt{63} = \sqrt{3^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7}$

$\sqrt{567} = \sqrt{3^4 \cdot 7} = 9\sqrt{7}$

6) $\sqrt{40} - \sqrt{90} = 2\sqrt{10} - 3\sqrt{10} = -\sqrt{10}$

$\sqrt{40} = \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = 2\sqrt{10}$

$\sqrt{90} = \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 3\sqrt{10}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Reduzindo os radicais semelhantes, encontre o numeral mais simples que represente a expressão:

1) $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} =$ *$3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$*

2) $4\sqrt{2} - 3 + 2\sqrt{2} + 4 =$ *$6\sqrt{2} + 1$*

3) $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 3\sqrt{a} + 3\sqrt{b} =$ *$-2\sqrt{a} + 4\sqrt{b}$*

4) $7\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3} =$ *$10\sqrt{5}$*

5) $3\sqrt[3]{10} + 5\sqrt[3]{10} - 2\sqrt[3]{10} =$ *$6\sqrt[3]{10}$*

6) $\sqrt[4]{x} - 3\sqrt[4]{x} + 4\sqrt[4]{x} =$ *$2\sqrt[4]{x}$*

7) $\sqrt[3]{a} + 2\sqrt[3]{b} - 3\sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{a} =$ *$2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$*

8) $\sqrt{11} + 5 - 4\sqrt{11} + 3 =$ *$-3\sqrt{11} + 8$*

9) $\sqrt[3]{m} - \sqrt{m} + 2\sqrt{m} + 4\sqrt[3]{m} =$ *$5\sqrt[3]{m} + \sqrt{m}$*

10) $\frac{3}{4}\sqrt{15} + \frac{1}{4}\sqrt{15} - \sqrt{15} =$ *0*

11) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} - \sqrt{3} =$ *$4\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$*

12) $\frac{7}{2}\sqrt[4]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[4]{2} =$ *$3\sqrt[4]{2}$*

b) Extraindo fatores do radicando, reduza os radicais semelhantes:

1) $\sqrt{98} - \sqrt{72} =$ *$\sqrt{2}$*

2) $\sqrt{200} + \sqrt{128} =$ *$18\sqrt{2}$*

3) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75} =$ *0*

4) $\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{150} =$ *0*

5) $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} =$ *$5\sqrt[3]{2}$*

6) $\sqrt[3]{320} - \sqrt[3]{135} =$ *$\sqrt[3]{5}$*

7) $3\sqrt{80} + 2\sqrt{125} =$ *$22\sqrt{5}$*

8) $4\sqrt{28} + 2\sqrt{63} - 3\sqrt{252} =$ *$-4\sqrt{7}$*

9) $\frac{1}{2}\sqrt{40} + \frac{2}{3}\sqrt{90} - \frac{1}{5}\sqrt{250} =$ *$2\sqrt{10}$*

10) $\frac{1}{3}\sqrt{108} - \frac{1}{2}\sqrt{192} + \frac{1}{4}\sqrt{48} =$ *$-\sqrt{3}$*

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO

Para efetuar multiplicação e divisão que envolvem radicais é importante saber reduzir radicais ao mesmo índice.

Observe o exemplo:

- Dados os radicais $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt[4]{2}$, obtenha dois outros radicais equivalentes a eles e que possuam o mesmo índice.

Procedimento		
1º passo: Achar o m.m.c. dos índices. m.m.c. (3, 4) = 12	**2º passo**: O m.m.c. encontrado será o índice dos radicais procurados. $\sqrt[3]{5} \rightarrow \sqrt[12]{}$ $\sqrt[4]{2} \rightarrow \sqrt[12]{}$	**3º passo**: Divide-se o m.m.c. pelo índice do radical dado e multiplica-se o resultado pelo expoente do radicando. $\sqrt[3]{5} \rightarrow \sqrt[12]{5^4}$ $\sqrt[4]{2} \rightarrow \sqrt[12]{2^3}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Reduza os radicais ao mesmo índice:

1) $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt[4]{3}$ → *$\sqrt[12]{2^8}$ $\sqrt[12]{3^3}$*

2) $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[4]{3}$ → *$\sqrt[12]{5^6}$ $\sqrt[12]{2^4}$ $\sqrt[12]{3^3}$*

3) $\sqrt[4]{x}$ e $\sqrt[5]{x^3}$ → *$\sqrt[20]{x^5}$ $\sqrt[20]{x^{12}}$*

4) $\sqrt{7}$, $\sqrt[4]{2^3}$ e $\sqrt[5]{3^2}$ → *$\sqrt[20]{7^{10}}$ $\sqrt[20]{2^{15}}$ $\sqrt[20]{3^8}$*

5) $\sqrt[3]{10^2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt[6]{3^5}$ → *$\sqrt[6]{10^4}$ $\sqrt[6]{5^3}$ $\sqrt[6]{3^5}$*

Pois bem, sabendo reduzir radicais ao mesmo índice, você tem condições de comparar dois números representados por radicais, lembrando que o número maior é aquele representado pelo radical cujo radicando é o maior, desde que os radicais tenham o mesmo índice.

Então:

$\sqrt{5} > \sqrt{2}$ $\quad$ $\sqrt[3]{15} > \sqrt[3]{9}$ $\quad$ $\sqrt[4]{3} < \sqrt[4]{7}$

VAMOS EXERCITAR

a) Coloque no □ o sinal > ou <:

1) $\sqrt{8}$ [>] $\sqrt{6}$
2) $\sqrt{20}$ [>] $\sqrt{12}$
3) $\sqrt{15}$ [>] $\sqrt{10}$
4) $\sqrt[3]{25}$ [>] $\sqrt[3]{11}$
5) $\sqrt[3]{7}$ [<] $\sqrt[3]{15}$
6) $\sqrt[3]{9}$ [<] $\sqrt[3]{30}$
7) $\sqrt[5]{2}$ [<] $\sqrt[5]{10}$
8) $\sqrt[8]{100}$ [>] $\sqrt[8]{50}$
9) $\sqrt[10]{6}$ [>] $\sqrt[10]{5}$

b) Reduza os radicais ao mesmo índice e, a seguir, coloque no □ o sinal > ou <:

1) $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt{3}$ → $\sqrt[6]{2^2}$ e $\sqrt[6]{3^3}$

Então: $\sqrt[3]{2}$ [<] $\sqrt{3}$

2) $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{3}$ → $\sqrt[12]{5^3}$ e $\sqrt[12]{3^4}$

Então: $\sqrt[4]{5}$ [>] $\sqrt[3]{3}$

3) $\sqrt[3]{2}$ e $\sqrt[5]{3}$ → $\sqrt[15]{2^5}$ e $\sqrt[15]{3^3}$

Então: $\sqrt[3]{2}$ [>] $\sqrt[5]{3}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Reduza os radicais ao mesmo índice:

1) $\sqrt[3]{m^2}$, $\sqrt{m}$ e $\sqrt[4]{x}$ $\left(\sqrt[12]{m^8}, \sqrt[12]{m^6} \text{ e } \sqrt[12]{x^3}\right)$
2) $\sqrt[5]{5^3}$, $\sqrt[4]{2^3}$ e $\sqrt[8]{3^5}$ $\left(\sqrt[40]{5^{24}}, \sqrt[40]{2^{30}} \text{ e } \sqrt[40]{3^{25}}\right)$
3) $\sqrt{2}$, $\sqrt[6]{3}$ e $\sqrt[12]{4}$ $\left(\sqrt[12]{2^6}, \sqrt[12]{3^2} \text{ e } \sqrt[12]{4}\right)$
4) $\sqrt[12]{7^5}$ e $\sqrt[18]{6^7}$ $\left(\sqrt[36]{7^{15}} \text{ e } \sqrt[36]{6^{14}}\right)$

b) Escreva os radicais em ordem decrescente:

1) $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$ e $\sqrt{5}$ $\left(\sqrt{10} > \sqrt{8} > \sqrt{5}\right)$
2) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{7}$ e $\sqrt[3]{2}$ $\left(\sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{7} > \sqrt[3]{2}\right)$
3) $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[4]{30}$ e $\sqrt[4]{20}$ $\left(\sqrt[4]{30} > \sqrt[4]{20} > \sqrt[4]{10}\right)$
4) $\sqrt{15}$, $\sqrt{18}$ e $\sqrt{21}$ $\left(\sqrt{21} > \sqrt{18} > \sqrt{15}\right)$

c) Escreva os radicais em ordem crescente:

1) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2^2}$ e $\sqrt[4]{2^3}$ $\left(\sqrt{2} < \sqrt[3]{2^2} < \sqrt[4]{2^3}\right)$
2) $\sqrt[5]{3^2}$, $\sqrt[8]{3^5}$ e $\sqrt[10]{3^7}$ $\left(\sqrt[5]{3^2} < \sqrt[8]{3^5} < \sqrt[10]{3^7}\right)$
3) $\sqrt[6]{5^5}$, $\sqrt[3]{5^2}$ e $\sqrt{5}$ $\left(\sqrt{5} < \sqrt[3]{5^2} < \sqrt[6]{5^5}\right)$
4) $\sqrt[12]{7^5}$, $\sqrt[18]{7^5}$ e $\sqrt[6]{7^5}$ $\left(\sqrt[18]{7^5} < \sqrt[12]{7^5} < \sqrt[6]{7^5}\right)$

Agora estamos em condições de efetuar a multiplicação e a divisão envolvendo radicais.

Observe o quadro:

Os radicais têm o mesmo índice	**Os radicais têm índices diferentes**
Multiplicação: Conserva-se o índice e multiplicam-se os radicandos. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt[3]{2^4}$	**Multiplicação**: Reduzem-se os radicais ao mesmo índice e procede-se como no caso anterior. $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{2^7}$ m.m.c. (3, 2) = 6
Divisão: Conserva-se o índice e divide-se o primeiro radicando pelo segundo. $\sqrt{15} : \sqrt{3} = \sqrt{15 : 3} = \sqrt{5}$ $\sqrt[4]{2^3} : \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^3 : 2} = \sqrt[4]{2^2}$	**Divisão**: Reduzem-se os radicais ao mesmo índice e procede-se como no caso anterior. $\sqrt[4]{3^3} : \sqrt[3]{3^2} \Rightarrow \sqrt[12]{3^9} : \sqrt[12]{3^8} = \sqrt[12]{3^9 : 3^8} = \sqrt[12]{3}$ m.m.c. (4, 3) = 12

VAMOS EXERCITAR

a) Efetue as multiplicações e divisões, extraindo os possíveis fatores do radicando:

1) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} = 2\sqrt{10}$
2) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{30}$
3) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{35}$
4) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$
5) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$
6) $\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[6]{x} = x$
7) $\sqrt{18} : \sqrt{3} = \sqrt{6}$
8) $\sqrt{42} : \sqrt{6} = \sqrt{7}$
9) $\sqrt[3]{2^2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}$
10) $\sqrt[5]{3^4} : \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$
11) $\sqrt[6]{x^5} : \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[3]{x^2}$
12) $\sqrt[10]{9x^2} : \sqrt[10]{3x} = \sqrt[10]{3x}$

b) Encontre o produto ou o quociente, reduzindo os radicais ao mesmo índice:

1) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^5}$
2) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[12]{3}$
3) $\sqrt[6]{x^5} \cdot \sqrt[3]{x^2} = x\sqrt{x}$
4) $\sqrt{2x} \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[4]{2x} = 2x\sqrt[12]{2x}$
5) $\sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[8]{5^3} = 5\sqrt[40]{5}$
6) $\sqrt[3]{4} : \sqrt{2} = \sqrt[6]{2}$
7) $\sqrt[4]{7^3} : \sqrt{7} = \sqrt[4]{7}$
8) $\sqrt[6]{11^5} : \sqrt[3]{11^2} = \sqrt[6]{11}$
9) $\sqrt[8]{10^5} : \sqrt[6]{10} = \sqrt[24]{10^{11}}$
10) $\sqrt[18]{(2m)^7} : \sqrt[12]{2m} = \sqrt[36]{(2m)^{11}}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine o produto:

1) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{8} = 4\sqrt{15}$
2) $\sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} \cdot \sqrt[3]{m} = m$
3) $\sqrt[3]{3x} \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[3]{x} = x\sqrt[3]{6}$
4) $\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^2b} \cdot \sqrt[4]{ab} = ab$
5) $3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} = 12\sqrt{10}$
6) $\frac{1}{2}\sqrt{7} \cdot \frac{2}{5}\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} = \sqrt{42}$
7) $\sqrt[3]{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{x^2-1}$
8) $\sqrt[3]{5m^2n} \cdot \sqrt[3]{2mn^2} = mn\sqrt[3]{10}$
9) $\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt{ab} = a\sqrt[6]{ab^5}$
10) $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x} = x\sqrt[6]{x}$
11) $\sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[3]{2a^2} = a\sqrt[12]{2^7 \cdot a^2}$
12) $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{200}$
13) $\sqrt[4]{x+1} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt[4]{(x+1)^3}$
14) $\sqrt[6]{(5x)^5} \cdot \sqrt[3]{(5x)^2} = 5x\sqrt{5x}$
15) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[12]{648}$
16) $\sqrt[10]{2a} \cdot \sqrt[5]{4a} = \sqrt[10]{32a^2}$
17) $\sqrt{2y} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt[4]{4y^3}$
18) $\sqrt[4]{x^3y^2} \cdot \sqrt[4]{xy^2} = xy$

b) Determine o quociente:

1) $\sqrt{80} : \sqrt{5} =$ 4

2) $\sqrt[3]{81} : \sqrt[3]{3} =$ 3

3) $\sqrt{120} : \sqrt{8} =$ $\sqrt{15}$

4) $\sqrt[4]{x^3y^2} : \sqrt[4]{x^2y} =$ $\sqrt[4]{xy}$

5) $\sqrt[5]{4x^3} : \sqrt[5]{2x^2} =$ $\sqrt[5]{2x}$

6) $\sqrt{6} : \sqrt[3]{2} =$ $\sqrt[6]{54}$

7) $\sqrt[3]{m^2n^3} : \sqrt{mn} =$ $\sqrt[6]{mn^3}$

8) $\sqrt[4]{m^n} : \sqrt{m} =$ $\sqrt[4]{m^{n-2}}$

9) $\sqrt[6]{(ab)^5} : \sqrt[3]{a^2b^2} =$ $\sqrt[6]{ab}$

10) $8\sqrt{2} : 2\sqrt[3]{2} =$ $4\sqrt[6]{2}$

11) $6\sqrt[4]{8} : 3\sqrt{2} =$ $2\sqrt[4]{2}$

12) $15\sqrt[5]{16} : 5\sqrt[3]{4} =$ $3\sqrt[15]{4}$

POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Observe o quadro:

Potenciação

Eleva-se um radical a uma potência elevando-se o radicando a essa potência.

Veja:

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^3}$

$(\sqrt[3]{5^2})^4 = \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2} \cdot \sqrt[3]{5^2}$

$= \sqrt[3]{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2} = \sqrt[3]{5^8}$

Conclusão: conserva-se o índice e eleva-se o radicando à potência indicada.

Radiciação

A raiz de um radical é outro radical cujo índice é o produto dos índices.

Veja:

$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{3} : 2} = 2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

Logo: $\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2} = \sqrt[6]{2}$

Conclusão: conserva-se o radicando e multiplicam-se os índices.

VAMOS EXERCITAR

a) Efetue a potenciação:

1) $(\sqrt{6})^2 =$ $\sqrt{6^2} = 6$

2) $(\sqrt{11})^2 =$ $\sqrt{11^2} = 11$

3) $(2\sqrt{3})^2 =$ $4\sqrt{3^2} = 12$

4) $(3\sqrt{5})^2 =$ $9\sqrt{5^2} = 45$

5) $(x\sqrt{x})^2 =$ $x^2\sqrt{x^2} = x^3$

6) $(\sqrt[3]{4})^3 =$ $\sqrt[3]{4^3} = 4$

7) $(\sqrt[3]{5})^2 =$ $\sqrt[3]{5^2}$

8) $(\sqrt[5]{2^3})^5 =$ $\sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$

9) $(2\sqrt[3]{2})^3 =$ $8\sqrt[3]{2^3} = 16$

10) $(3\sqrt[3]{2})^3 =$ $27\sqrt[3]{2^3} = 54$

11) $(\sqrt[3]{2^2})^2 =$ $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

12) $(\sqrt[5]{3^2})^3 =$ $\sqrt[5]{3^6} = 3\sqrt[5]{3}$

13) $(\sqrt[6]{5})^8 =$ $\sqrt[6]{5^8} = 5\sqrt[6]{5^2} = 5\sqrt[3]{5}$

14) $(2\sqrt[4]{3})^2 =$ $4\sqrt[4]{3^2} = 4\sqrt{3}$

15) $(\sqrt[6]{7^5})^3 =$ $\sqrt[6]{7^{15}} = 49\sqrt[6]{7^3} = 49\sqrt{7}$

b) Efetue a radiciação:

1) $\sqrt{\sqrt{5}} =$ $\sqrt[4]{5}$

2) $\sqrt[3]{\sqrt{3}} =$ $\sqrt[6]{3}$

3) $\sqrt[4]{\sqrt{x}} =$ $\sqrt[8]{x}$

4) $\sqrt[6]{\sqrt{2}} =$ $\sqrt[12]{2}$

5) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^3}} =$ $\sqrt[12]{2^3} = \sqrt[4]{2}$

6) $\sqrt[5]{\sqrt{3}} =$ $\sqrt[10]{3}$

7) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{x^{12}}} =$ $\sqrt[24]{x^{12}} = \sqrt{x}$

8) $\sqrt{\sqrt{x^4}} =$ $\sqrt[4]{x^4} = x$

9) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}} =$ $\sqrt[8]{5}$

10) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[4]{6}}} =$ $\sqrt[24]{6}$

11) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{11}}} =$ $\sqrt[60]{11}$

12) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{10}}} =$ $\sqrt[24]{10}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Efetue:

1) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{2^2}\right)^2 =$ $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$

2) $(5\sqrt[4]{2^3})^2 =$ $50\sqrt{2}$

3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3^3}\right)^2 =$ 3

4) $(\sqrt[5]{x^2})^3 =$ $x\sqrt[5]{x}$

5) $\left(\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}\right)^3 =$ $\frac{x^2}{y}$

6) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} =$ $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

7) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}b}} =$ $\sqrt[15]{a^{15}b} = a\sqrt[15]{b}$

8) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^{48}}}} =$ $\sqrt[24]{x^{48}} = x^2$

9) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^6 =$ $(\sqrt[6]{2})^6 = \sqrt[6]{2^6} = 2$

OS RADICAIS E A PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA

Considere a multiplicação: $3(x + 2)$. Para efetuá-la basta aplicar, como você já sabe, a propriedade distributiva.

Assim:

$3(x + 2) = 3x + 6$

Agora considere a multiplicação: $\sqrt{3}\,(\sqrt{2} + \sqrt{3})$. Você irá efetuá-la também por aplicação da propriedade distributiva.

Assim:

$$\sqrt{3}\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}_{\sqrt{6}} + \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}_{\sqrt{9}} = \sqrt{6} + 3$$

Efetue as multiplicações, aplicando a propriedade distributiva:

1) $\sqrt{5}\,(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$ $\sqrt{10} + \sqrt{15}$

2) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - \sqrt{2}) =$ $3 - \sqrt{6}$

3) $\sqrt{6}\,(\sqrt{3} + 2) =$ $3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$

4) $\sqrt{10}\,(\sqrt{10} - 1) =$ $10 - \sqrt{10}$

5) $\sqrt{7}\,(1 + \sqrt{7}) =$ $\sqrt{7} + 7$

6) $\sqrt{a}\,(a + \sqrt{a}) =$ $a\sqrt{a} + a$

7) $\sqrt{11}\,(\sqrt{2} + \sqrt{11}) =$ $\sqrt{22} + 11$

8) $\sqrt{15}\,(\sqrt{15} - \sqrt{6}) =$ $15 - 3\sqrt{10}$

9) $2\sqrt{2}\,(\sqrt{3} + \sqrt{2}) =$ $2\sqrt{6} + 4$

10) $5\sqrt{3}\,(\sqrt{3} - 1) =$ $15 - 5\sqrt{3}$

OS RADICAIS E OS PRODUTOS NOTÁVEIS

Observe os quadros:

Quadrado de uma soma indicada	**Quadrado de uma diferença indicada**
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$	$(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$= 3 + 2\sqrt{6} + 2$	$= 5 - 2\sqrt{15} + 3$
$= 5 + 2\sqrt{6}$	$= 8 - 2\sqrt{15}$

Produto de uma soma indicada por uma diferença indicada
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2$
$= 5 - 2$
$= 3$

VAMOS EXERCITAR

Desenvolva, aplicando produto notável:

1) $(\sqrt{6} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 + 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$= 6 + 2\sqrt{18} + 3$
$= 9 + 2\sqrt{18} = 9 + 6\sqrt{2}$

2) $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5})^2 + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 + (2)^2$
$= 5 + 4\sqrt{5} + 4$
$= 9 + 4\sqrt{5}$

3) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{7})^2 - 2 \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$
$= 7 - 2\sqrt{21} + 3$
$= 10 - 2\sqrt{21}$

4) $(1 - \sqrt{2})^2 = (1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$
$= 1 - 2\sqrt{2} + 2$
$= 3 - 2\sqrt{2}$

5) $(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2$
$= 3 - 2$
$= 1$

6) $(2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = (2)^2 - (\sqrt{3})^2$
$= 4 - 3$
$= 1$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

- Efetue, aplicando a propriedade distributiva ou produto notável:

1) $\sqrt{8}(\sqrt{2} + \sqrt{8}) =$ 12
2) $\sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{5}) =$ $\sqrt{30} - 5$
3) $3\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$ $6 + 3\sqrt{6}$
4) $2\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) =$ $2\sqrt{6} - 6$
5) $\sqrt{7}(\sqrt{7} + 3) =$ $7 + 3\sqrt{7}$
6) $(\sqrt{10} + \sqrt{3})^2 =$ $13 + 2\sqrt{30}$
7) $(3\sqrt{2} - \sqrt{5})^2 =$ $23 - 6\sqrt{10}$
8) $(2\sqrt{3} + 3) \cdot (2\sqrt{3} - 3) =$ 3
9) $(5\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 =$ $25x + y - 10\sqrt{xy}$
10) $(\sqrt{m} + 2\sqrt{n})^2 =$ $m + 4\sqrt{mn} + 4n$
11) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2 =$ $38 - 12\sqrt{10}$
12) $(5 + \sqrt{3}) \cdot (5 - \sqrt{3}) =$ 22
13) $(3 + \sqrt{2})^2 =$ $11 + 6\sqrt{2}$
14) $(5 - \sqrt{3})^2 =$ $22 - 10\sqrt{3}$
15) $(\sqrt{10} + 3) \cdot (\sqrt{10} - 3) =$ 1

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Como você poderia provar que:

1) $\sqrt{3\sqrt{2}}$ equivale a $\sqrt[4]{18}$?

2) $\sqrt{2\sqrt{4\sqrt{2}}}$ equivale a $2\sqrt[8]{2}$?

3) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$ equivale a $\sqrt{2}$?

A RACIONALIZAÇÃO

Considere o numeral: $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

Numerais deste tipo, ou seja, frações que apresentam radical em denominador tornam complicados determinados cálculos. Então é conveniente converter estas frações em outras equivalentes que não apresentem radical em denominador.

O processo utilizado para fazer esta conversão recebe o nome de **racionalização de denominador**.

Vamos estudar alguns casos simples de racionalização.

1º caso: O denominador é constituído por um único termo.

O denominador contém radical de índice 2.

Exemplo: $\dfrac{4}{3\sqrt{2}}$

Resolução: Multiplicam-se ambos os termos da fração pelo radical de índice 2 do denominador.

$$\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{2^2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

irracional → racional

O denominador contém radical de índice diferente de 2.

Exemplo: $\dfrac{6}{5\sqrt[5]{2^2}}$

Resolução: Multiplicam-se ambos os termos da fração por um radical de mesmo índice, cujo radicando tenha a mesma base e expoente igual à diferença entre o índice e o expoente do radicando já existente.

$$\frac{6}{5\sqrt[5]{2^2}} = \frac{6\cdot\sqrt[5]{2^3}}{5\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{6\sqrt[5]{2^3}}{5\cdot\sqrt[5]{2^5}} = \frac{6\sqrt[5]{2^3}}{5\cdot 2}$$

$$\frac{6}{5\sqrt[5]{2^2}} = \frac{3\sqrt[5]{8}}{5}$$

O radical pelo qual os termos da fração são multiplicados recebe o nome de **fator racionalizante**.

VAMOS EXERCITAR

Racionalize o denominador e indique o fator racionalizante:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Fator racionalizante: $\sqrt{6}$

5) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{2}} = \dfrac{2\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}} = \dfrac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{2\sqrt[4]{8}}{2} = \sqrt[4]{8}$

Fator racionalizante: $\sqrt[4]{2^3}$

2) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

Fator racionalizante: $\sqrt{2}$

6) $\dfrac{3}{2\sqrt[6]{3^5}} = \dfrac{3\sqrt[6]{3}}{2\sqrt[6]{3^5}\cdot\sqrt[6]{3}} = \dfrac{3\sqrt[6]{3}}{2\cdot\sqrt[6]{3^6}} = \dfrac{3\sqrt[6]{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt[6]{3}}{2}$

Fator racionalizante: $\sqrt[6]{3}$

3) $\dfrac{10}{3\sqrt{5}} = \dfrac{10\cdot\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{5}}{3\cdot 5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{3}$

Fator racionalizante: $\sqrt{5}$

7) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{4}} = \dfrac{3\cdot\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{2^2}\cdot\sqrt[4]{2^2}} = \dfrac{3\sqrt[4]{4}}{\sqrt[4]{2^4}} = \dfrac{3\sqrt[4]{4}}{2}$

Fator racionalizante: $\sqrt[4]{2^2}$

4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{18}}{2\cdot 6} = \dfrac{3\sqrt{2}}{12} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Fator racionalizante: $\sqrt{6}$

8) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{125}} = \dfrac{1\cdot\sqrt[5]{5^2}}{\sqrt[5]{5^3}\cdot\sqrt[5]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[5]{25}}{\sqrt[5]{5^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{25}}{5}$

Fator racionalizante: $\sqrt[5]{5^2}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Racionalize o denominador das frações:

1) $\frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

2) $\frac{7}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$

3) $\frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

4) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

5) $\frac{6}{\sqrt{12}} = \sqrt{3}$

6) $\frac{x}{y\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{y}$

7) $\frac{m}{\sqrt{m}} = \sqrt{m}$

8) $\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{70}}{35}$

9) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4}$

10) $\frac{4}{\sqrt[4]{2^2}} = 2\sqrt[4]{4}$

11) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^2}} = 2\sqrt[5]{27}$

12) $\frac{15}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{2}$

13) $\frac{1}{\sqrt[10]{2^7}} = \frac{\sqrt[10]{8}}{2}$

14) $\frac{10}{\sqrt[6]{5^5}} = 2\sqrt[6]{5}$

15) $\frac{8}{\sqrt[8]{32}} = 4\sqrt[8]{8}$

16) $\frac{12}{\sqrt[5]{81}} = 4\sqrt[5]{3}$

2º caso: O denominador é constituído por uma soma ou diferença de dois termos, dos quais pelo menos um contém radical de índice 2.

O denominador é constituído por uma soma indicada.

Exemplo: $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$

Resolução: Multiplicam-se ambos os termos da fração pela diferença entre os mesmos termos da soma.

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(\sqrt{5}-1)}{\underset{2}{\cancel{4}}}$$

Então: $\frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

O denominador é constituído por uma diferença indicada.

Exemplo: $\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$

Resolução: Multiplicam-se ambos os termos da fração pela soma dos mesmos termos da diferença.

$$\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \frac{6(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{(\sqrt{15}-\sqrt{3})(\sqrt{15}+\sqrt{3})} = \frac{6(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{15-3} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}}(\sqrt{15}+\sqrt{3})}{\underset{2}{\cancel{12}}}$$

Então: $\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$

VAMOS EXERCITAR

- Racionalize o denominador e indique o fator racionalizante:

1) $\frac{2}{3+\sqrt{3}} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{6} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$

Fator racionalizante: $3-\sqrt{3}$

2) $\frac{10}{2-\sqrt{2}} = \frac{10(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})} = \frac{10(2+\sqrt{2})}{2} = 5(2+\sqrt{2})$

Fator racionalizante: $2+\sqrt{2}$

3) $\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{2}$

Fator racionalizante: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$

4) $\dfrac{2}{\sqrt{7} - 2} = \dfrac{2(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)} = \dfrac{2(\sqrt{7}+2)}{3}$

Fator racionalizante: $\sqrt{7} + 2$

5) $\dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \dfrac{5+2\cdot\sqrt{5}\sqrt{2}+2}{5-2} = \dfrac{7+2\sqrt{10}}{3}$

Fator racionalizante: $\sqrt{5} + \sqrt{2}$

6) $\dfrac{3 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}} = \dfrac{(3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \dfrac{9+2\cdot3\cdot\sqrt{2}+2}{9-2} = \dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$

Fator racionalizante: $3 + \sqrt{2}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Racionalize o denominador das frações:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

2) $\dfrac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$

3) $\dfrac{3}{\sqrt{7} - 1} = \dfrac{\sqrt{7}+1}{2}$

4) $\dfrac{3}{4 + \sqrt{10}} = \dfrac{4-\sqrt{10}}{2}$

5) $\dfrac{8}{5 - \sqrt{13}} = \dfrac{2(5+\sqrt{13})}{3}$

6) $\dfrac{2}{\sqrt{10} + \sqrt{7}} = \dfrac{2(\sqrt{10}-\sqrt{7})}{3}$

7) $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} = \dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$

8) $\dfrac{\sqrt{11} + 1}{\sqrt{11} - 1} = \dfrac{6+\sqrt{11}}{5}$

9) $\dfrac{m - n}{\sqrt{m} + \sqrt{n}} = \sqrt{m} - \sqrt{n}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Escreva sob a forma de potência:

1) $\sqrt[3]{x^y} = x^{\frac{y}{3}}$

2) $\sqrt[x]{y^{5x}} = y^{\frac{5x}{x}} = y^5$

3) $\sqrt[2x]{a^{3x}} = a^{\frac{3}{2}}$

4) $\sqrt[3]{(x+1)^2} = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

5) $\sqrt[x+1]{m^{2x+2}} = m^{\frac{2x+2}{x+1}} = m^2$

6) $\sqrt[mn]{x^m} = x^{\frac{m}{mn}} = x^{\frac{1}{n}}$

b) Determine o valor das potências:

1) $9^{\frac{1}{2}} = 3$

2) $81^{\frac{1}{2}} = 9$

3) $8^{\frac{1}{3}} = 2$

4) $125^{\frac{1}{3}} = 5$

5) $64^{\frac{1}{6}} = 2$

6) $1\,000^{\frac{1}{3}} = 10$

7) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

8) $\left(\frac{16}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}$

9) $2 \cdot 27^{\frac{1}{3}} = 6$

c) Determine o numeral mais simples que represente a expressão:

1) $\sqrt{20} + \sqrt[4]{25} =$ $3\sqrt{5}$

2) $\sqrt[3]{54} + \sqrt[6]{4} =$ $4\sqrt[3]{2}$

3) $\sqrt{48} + 2\sqrt{27} - \sqrt{300} =$ 0

4) $2\sqrt{12} \cdot 5\sqrt{3} =$ 60

5) $3\sqrt[5]{x^4} \cdot 5\sqrt[10]{x^3} \cdot 4\sqrt{xy} =$ $60x\sqrt[10]{x^6y^5}$

6) $20\sqrt[3]{m^2n} : 4\sqrt[4]{m^2n} =$ $5\sqrt[12]{m^2n}$

7) $(2x\sqrt{xy})^2 =$ $4x^3y$

8) $(2\sqrt[6]{2^3 \cdot 3^3})^2 =$ 24

9) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{m^3n^6}}} =$ $\sqrt[8]{mn^2}$

10) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{4}}}} =$ 2

d) Desenvolva, aplicando produto notável:

1) $(\sqrt{m} + \sqrt{n})^2 =$ $m + 2\sqrt{mn} + n$

2) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) =$ $x - y$

3) $(\sqrt{x} + \sqrt{2x})^2 =$ $3x + 2x\sqrt{2}$

4) $(a\sqrt{a} - b\sqrt{b})^2 =$ $a^3 - 2ab\sqrt{ab} + b^3$

5) $(2\sqrt{2} + \sqrt{5})(2\sqrt{2} - \sqrt{5}) =$ 3

6) $(\sqrt[4]{m} - \sqrt[4]{n})^2 =$ $\sqrt{m} - 2\sqrt[4]{mn} + \sqrt{n}$

e) Testes:

1) Se $A = \sqrt[4]{14}$ e $B = \sqrt{7}$, então B é maior que A porque:

a. ( ) 14 é maior que 7.
b. ( ) o índice do radical B é menor que o do radical A.
c. (X) $\sqrt[4]{14}$ é menor que $\sqrt[4]{49}$.
d. ( ) o enunciado é falso.

2) $\dfrac{m\sqrt{a}}{\sqrt{m}}$ equivale a:

a. ( ) $m\sqrt{am}$ b. ( ) $m^2\sqrt{a}$ c. (X) $\sqrt{am}$ d. ( ) $a\sqrt{m}$

3) $\dfrac{3}{\sqrt{27} - \sqrt{12}}$ é equivalente a:

a. (X) $\sqrt{3}$ b. ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c. ( ) $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ d. ( ) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

4) A expressão $3\sqrt{50} - \sqrt{2} + 2\sqrt{98} - 5\sqrt{18}$ equivale a:

a. (X) $13\sqrt{2}$ b. ( ) $11\sqrt{168}$ c. ( ) $-4\sqrt{2}$ d. ( ) $\sqrt{128}$

5) Racionalizando o denominador de $\dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, encontramos:

a. ( ) $a + b$ b. ( ) $a - b$ c. ( ) $-2\sqrt{ab}$ d. (X) $\dfrac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a - b}$

6) Racionalizando o denominador de $\dfrac{2}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$, obtemos:

a. (X) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$
b. ( ) $\sqrt{2x}$
c. ( ) $2\sqrt{x}$
d. ( ) $\sqrt{x^2 - 1}$

Unidade 2

O ESTUDO DA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

NOÇÃO DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Uma equação com uma variável é do segundo grau quando o maior expoente dessa variável for 2. Exemplos: $x^2 - 5x = 6$; $3y^2 = 4y - 12$; $7m = -m^2$.

Analise as equações:

1) $20x^2 - 61x = -8$

2) $x^2 - 2x = -4x^3 - 2$

3) $5x^2 - 4 = -x^4$

4) $7x - 12 = x^2$

5) $21 - 10y = -y^2$

6) $2m + 3 = 0$

7) $y^2 + 3y + 2 = 0$

8) $3t^2 = 5t - 2$

9) $2x^2 - 50 = 0$

10) $5m^2 = 10m$

Agora complete a frase:

As equações de números 1, 4, 5, 7, 8, 9 e 10 são do segundo grau.

FORMA GERAL

Toda equação do segundo grau pode ser reduzida à forma $ax^2 + bx + c = 0$, denominada **forma geral**. Veja:

$ax^2 + bx + c = 0$ onde
- x: é a variável
- a: coeficiente de x^2
- b: coeficiente de x
- c: termo independente

Veja um exemplo:

$\boxed{3}x^2 \boxed{-10}x \boxed{+3} = 0$ (3 → a; −10 → b; +3 → c)

- variável: x
- coeficiente de x^2: 3
- coeficiente de x: −10
- termo independente: 3

VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente:

1) $2x^2 - 5x + 8 = 0$

variável: x

a = 2

b = -5

c = 8

2) $3y^2 + 7y - 10 = 0$

variável: y

a = 3

b = 7

c = -10

3) $m^2 - m + 2 = 0$

variável: m

a = 1

b = -1

c = 2

4) $-x^2 + 7x - 10 = 0$

variável: x

coeficiente de x^2: -1

coeficiente de x: 7

termo independente: -10

5) $-2y^2 - 5y + 1 = 0$

variável: y

coeficiente de y^2: -2

coeficiente de y: -5

termo independente: 1

6) $7p^2 - 6p - 1 = 0$

variável: p

coeficiente de p^2: 7

coeficiente de p: -6

termo independente: -1

b) Complete o quadro:

Equação (forma geral)	Variável	a	b	c
$3x^2 - 6x + 11 = 0$	x	3	−6	11
$-y^2 - 12y + 15 = 0$	y	−1	−12	15
$2p^2 - 7p - 6 = 0$	p	2	−7	−6
$5m^2 + 8m - 1 = 0$	m	5	8	−1
$-3q^2 + 2q - 5 = 0$	q	−3	2	−5
$4x^2 + 3x + 3 = 0$	x	4	3	3

Com relação aos coeficientes a, b e c, você deve saber o seguinte:

- o coeficiente a deve ser diferente de zero ($a \neq 0$);
- os coeficientes b e c podem assumir quaisquer valores.

Quando o coeficiente **b** ou **c** ou ambos são nulos, não se escrevem os termos correspondentes e se diz que a equação é incompleta.

Veja:

$2x^2 - 3x + 5 = 0$

Equação completa $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 5 \end{cases}$

$3x^2 + 0x - 7 = 0$
ou $3x^2 - 7 = 0$

Equação incompleta $\begin{cases} a = 3 \\ b = 0 \\ c = -7 \end{cases}$

$x^2 - 4x + 0 = 0$
ou $x^2 - 4x = 0$

Equação incompleta $\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$

$5x^2 + 0x + 0 = 0$
ou $5x^2 = 0$

Equação incompleta $\begin{cases} a = 5 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente:

1) $7x^2 - 8x + 1 = 0$
a = 7
b = -8
c = 1
Equação completa

2) $6y^2 - 13 = 0$
a = 6
b = 0
c = -13
Equação incompleta

3) $x^2 + 3x = 0$
a = 1
b = 3
c = 0
Equação incompleta

4) $2x^2 = 0$
a = 2
b = 0
c = 0
Equação incompleta

b) Sendo **x** a variável, componha as equações de acordo com os valores dos coeficientes:

1) a = 3
b = 2
c = −1
Equação: $3x^2 + 2x - 1 = 0$

2) a = 4
b = −2
c = 0
Equação: $4x^2 - 2x = 0$

3) a = 1
b = 9
c = 0
Equação: $x^2 + 9x = 0$

4) a = −3
b = −7
c = 0
Equação: $-3x^2 - 7x = 0$

5) a = 7
b = 0
c = −1
Equação: $7x^2 - 1 = 0$

6) a = 5
b = 0
c = 3
Equação: $5x^2 + 3 = 0$

7) a = −8
b = 0
c = 0
Equação: $-8x^2 = 0$

8) a = 10
b = 0
c = 0
Equação: $10x^2 = 0$

REDUÇÃO À FORMA GERAL

Muitas vezes, uma equação do segundo grau não aparece escrita na forma geral. Porém, através de transformações que você já conhece, essa equação pode ser reduzida à forma geral.

Veja os exemplos:

1) $5x^2 - 7x = 9x + 1$

$5x^2 - 7x - 9x - 1 = 0$

$\boxed{5x^2 - 16x - 1 = 0}$

2) $x(3x - 10) = -8x$

$3x^2 - 10x = -8x$

$3x^2 - 10x + 8x = 0$

$\boxed{3x^2 - 2x = 0}$

3) $(x + 1)^2 = 3$

$x^2 + 2x + 1 = 3$

$x^2 + 2x + 1 - 3 = 0$

$\boxed{x^2 + 2x - 2 = 0}$

EXERCÍCIOS

Reduza à forma geral as seguintes equações do segundo grau:

1) $-6x = 1 - 8x^2$

$8x^2 - 6x - 1 = 0$

2) $2x^2 - 4x + 6 = -3x + 2$

$2x^2 - 4x + 3x + 6 - 2 = 0$

$2x^2 - x + 4 = 0$

3) $x(x - 2) = 2(x + 6)$

$x^2 - 2x = 2x + 12$

$x^2 - 2x - 2x - 12 = 0$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

4) $4(x + 2) = (x + 2)^2$

$4x + 8 = x^2 + 4x + 4$

$-x^2 + 4x - 4x + 8 - 4 = 0$

$-x^2 + 4 = 0$

5) $(x - 3)^2 = 9(x + 1)$

$x^2 - 6x + 9 = 9x + 9$

$x^2 - 6x - 9x + 9 - 9 = 0$

$x^2 - 15x = 0$

6) $(y + 5)(y - 5) = 4y$

$y^2 - 25 = 4y$

$y^2 - 4y - 25 = 0$

7) $x^2 - \frac{3}{5} = 2x$

$\frac{5x^2 - 3}{5} = \frac{10x}{5}$

$5x^2 - 10x - 3 = 0$

8) $\frac{2y}{3} - y = \frac{y^2}{6}$

$\frac{4y - 6y}{6} = \frac{y^2}{6}$

$-y^2 + 4y - 6y = 0$

$-y^2 - 2y = 0$

9) $(x + 2)(x + 5) = 3(x - 1)$

$x^2 + 7x + 10 = 3x - 3$

$x^2 + 7x - 3x + 10 + 3 = 0$

$x^2 + 4x + 13 = 0$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete os quadros:

1)

Equação	Variável	a	b	c
$x^2 + 9x - 4 = 0$	x	1	9	−4
$3y^2 + 4y + 1 = 0$	y	3	4	1
$2m^2 - 5m - 6 = 0$	m	2	−5	−6
$3p^2 - 5p - 1 = 0$	p	3	−5	−1
$6x^2 - 4x = 0$	x	6	−4	0
$4x^2 - 64 = 0$	x	4	0	−64
$7m^2 - 49 = 0$	m	7	0	−49
$3p^2 + 5p = 0$	p	3	5	0
$-7y^2 - 5y + 4 = 0$	y	−7	−5	4
$5x^2 = 0$	x	5	0	0
$9t^2 = 0$	t	9	0	0
$3x^2 - 1 = 0$	x	3	0	−1

2)

Equação (variável x)	a	b	c
$5x^2 - 6x = 0$	5	−6	0
$-x^2 - 9x + 20 = 0$	−1	−9	20
$3x^2 + 4x - 5 = 0$	3	4	−5
$2x^2 - 6 = 0$	2	0	−6
$4x^2 - 36x = 0$	4	−36	0
$8x^2 = 0$	8	0	0
$-2x^2 + 3x = 0$	−2	3	0
$10x^2 - 4 = 0$	10	0	−4

3)

Equação (variável y)	a	b	c
$y^2 = 0$	1	0	0
$2y^2 - 3 = 0$	2	0	−3
$-3y^2 - 5y + 8 = 0$	−3	−5	8
$my^2 + ny - t = 0$	m	n	$-t$
$6y^2 - 7y = 0$	6	−7	0
$hy^2 + my + p = 0$	h	m	p
$fy^2 + gy + 4 = 0$	f	g	4
$gy^2 + ry - 2 = 0$	g	r	−2

b) Assinale com C as equações completas e com I as incompletas:

1) $x^2 - 9x + 12 = 0$ (C)

2) $4x^2 - 16x = 0$ (I)

3) $x^2 = 36$ (I)

4) $y^2 + 6y + 1 = 0$ (C)

5) $m^2 - 2 = 0$ (I)

6) $p^2 - 4p = 0$ (I)

7) $2z^2 - 13z + 10 = 0$ (C)

8) $18m^2 - 72 = 0$ (I)

9) $x^2 = \frac{25}{4}$ (I)

10) $3x^2 = 8x + 3$ (C)

c) Reduza à forma geral as equações do segundo grau:

1) $2x^2 = 7x + 4$

Forma geral: $2x^2 - 7x - 4 = 0$

2) $x(x - 3) = 5$

Forma geral: $x^2 - 3x - 5 = 0$

3) $2x(3x - 1) = 3x$

Forma geral: $6x^2 - 5x = 0$

4) $2(5x^2 - 4) = -10(x + 2)$

Forma geral: $10x^2 + 10x + 12 = 0$

5) $5(3x^2 - 8) = -35$

Forma geral: $15x^2 - 5 = 0$

6) $\frac{3x^2}{4} - \frac{2}{3} = \frac{x}{12}$

Forma geral: $9x^2 - x - 8 = 0$

7) $\frac{x + 3}{2} = \frac{x^2 - 1}{3}$

Forma geral: $2x^2 - 3x - 11 = 0$

8) $(x + 4)^2 = 5$

Forma geral: $x^2 + 8x + 11 = 0$

9) $(2x - 3)^2 = (x + 1)(x + 6)$

Forma geral: $3x^2 - 19x + 3 = 0$

10) $(x + 10)(x - 10) = 5(x - 18)$

Forma geral: $x^2 - 5x - 10 = 0$

d) Associe a coluna da esquerda com a da direita:

Coluna I: equação

1) $x(x - 8) = -12$

2) $x^2 - \frac{5}{2} = 4x$

3) $10x^2 + 6 = 5x\left(x + \frac{31}{5}\right)$

4) $6x^2 - \frac{7x}{2} = 5$

5) $(x + 2)(x - 3) = 5x$

6) $(x - 1)(x - 4) = 2(x + 3)$

7) $3x^2 = 27$

8) $3(x^2 - 1) = 9$

9) $4(x^2 + 1) = 4(x + 1)$

10) $4(x^2 + 3) - 3(x + 1) = 7x$

Coluna II: forma geral correspondente

(4) $12x^2 - 7x - 10 = 0$

(5) $x^2 - 6x - 6 = 0$

(2) $2x^2 - 8x - 5 = 0$

(9) $4x^2 - 4x = 0$

(7) $3x^2 - 27 = 0$

(1) $x^2 - 8x + 12 = 0$

(10) $4x^2 - 10x + 9 = 0$

(8) $3x^2 - 12 = 0$

(3) $5x^2 - 31x + 6 = 0$

(6) $x^2 - 7x - 2 = 0$

RAÍZES: OS ELEMENTOS DO CONJUNTO VERDADE

Observe a equação $x^2 = 9$.

Qual será, no conjunto dos números reais, o conjunto verdade dessa equação?

Para responder a essa pergunta, temos que descobrir quais os números que ao quadrado dão como resultado o número nove. Esses números são -3 e $+3$.

Veja por quê:

$$x^2 = 9 \quad\rightarrow\quad (-3)^2 = 9$$

$$x^2 = 9 \quad\rightarrow\quad (+3)^2 = 9$$

Então temos:

- equação: $x^2 = 9$
- conjunto universo: $\mathbb{R}$
- conjunto verdade: $V = \{-3, +3\}$

Todos os elementos do conjunto verdade recebem o nome de raízes da equação. Logo, as raízes da equação $x^2 = 9$ são: -3 e $+3$.

Como reconhecer se um número dado é raiz de uma equação?

Para isso, basta substituir a variável (letra) pelo número dado. Assim:

- se a sentença obtida for verdadeira, o número dado será raiz.
- se a sentença obtida não for verdadeira, o número dado não será raiz.

Exemplo:

- Verifique se o número dado é raiz da equação:

1) número: 2

equação: $x^2 - 5x + 6 = 0$

Resolução:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(2)^2 - 5 \cdot (2) + 6 = 0$

$4 - 10 + 6 = 0$

$0 = 0$ (V)

Resposta: É raiz.

2) número: 5

equação: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Resolução:

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(5)^2 - 7 \cdot (5) + 12 = 0$

$25 - 35 + 12 = 0$

$2 = 0$ (F)

Resposta: Não é raiz.

VAMOS EXERCITAR

Complete os blocos, verificando se o número é ou não raiz da equação:

Bloco 1

Número	**-2**	**3**	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$
Equação	$4x^2 - 16 = 0$ $4(-2)^2 - 16 = 0$ $4 \cdot 4 - 16 = 0$ $16 - 16 = 0$ $0 = 0$ (V) Resposta: É raiz.	$x^2 + 8x = 12$ $(3)^2 + 8(3) = 12$ $9 + 24 = 12$ $33 = 12$ (F) Resposta: Não é raiz.	$4x^2 = 25$ $4(\frac{1}{3})^2 = 25$ $4 \cdot \frac{1}{9} = 25$ $\frac{4}{9} = 25$ (F) Resposta: Não é raiz.	$16x^2 - 4 = 0$ $16(-\frac{1}{2})^2 - 4 = 0$ $16 \cdot \frac{1}{4} - 4 = 0$ $4 - 4 = 0$ $0 = 0$ (V) Resposta: É raiz.

Bloco 2

Número	0	−5	4	$\frac{2}{3}$
Equação	$4x^2 - 5x = 0$ $4(0)^2 - 5(0) = 0$ $0 - 0 = 0$ $0 = 0$ (V) Resposta: É raiz.	$x^2 + 8x + 15 = 0$ $(-5)^2 + 8(-5) + 15 = 0$ $25 - 40 + 15 = 0$ $0 = 0$ (V) Resposta: É raiz.	$2y^2 - 3y + 1 = 0$ $2(4)^2 - 3(4) + 1 = 0$ $32 - 12 + 1 = 0$ $21 = 0$ (F) Resposta: Não é raiz.	$y^2 + \frac{4}{9} = 0$ $(\frac{2}{3})^2 + \frac{4}{9} = 0$ $\frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 0$ $\frac{8}{9} = 0$ (F) Resposta: Não é raiz.

DETERMINAÇÃO DO CONJUNTO VERDADE: RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Você já sabe que as equações do segundo grau podem ser completas ou incompletas. Vejamos inicialmente a resolução das equações incompletas em U = IR.

Observe os blocos:

Bloco 1: equações do tipo $ax^2 + c = 0$ (b = 0)

$x^2 - 25 = 0$	$2x^2 - 32 = 0$	$x^2 + 4 = 0$	$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$
$x^2 - 25 = 0$ $x^2 = 25$ $x = \pm\sqrt{25}$ $x = \pm 5$ Raízes: −5 e +5. V = {−5, +5}	$2x^2 - 32 = 0$ $2x^2 = 32$ $x^2 = 16$ $x = \pm\sqrt{16}$ $x = \pm 4$ Raízes: −4 e +4. V = {−4, +4}	$x^2 + 4 = 0$ $x^2 = -4$ $x = \pm\sqrt{-4} \notin IR$ Raízes: Não existem V = ∅	$(x + 1)^2 = 2(x + 1)$ $x^2 + 2x + 1 = 2x + 2$ $x^2 + 2x - 2x + 1 - 2 = 0$ $x^2 - 1 = 0$ $x^2 = 1 \iff x = \pm\sqrt{1}$ $x = \pm 1$ Raízes: −1 e +1. V = {−1, +1}

AGORA FAÇA VOCÊ

Encontre em U = IR o conjunto verdade das equações:

1) $2x^2 - 72 = 0$

V = {−6, +6}

2) $3m^2 - 27 = 0$

V = {−3, +3}

3) $-64 + 4y^2 = 0$

V = {−4, +4}

4) $4x^2 - 1 = 0$

V = $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

5) $18m^2 - 2 = 0$

V = $\{-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\}$

6) $72y^2 - 2 = 0$

V = $\{-\frac{1}{6}, +\frac{1}{6}\}$

7) $x^2 + 8 = 0$

V = ∅

8) $m^2 + 16 = 0$

V = ∅

9) $20 + 4x^2 = 0$

V = ∅

10) $28y^2 - 7 = 0$

V = $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

11) $(2x + 1)^2 = 4x + 2$

V = $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

12) $x(x + 4) = 9 + 4x$

V = $\{-3, +3\}$

13) $2x(x + 5) - 2(5x + 4) = 0$

V = $\{-2, +2\}$

14) $(x + 7)(x - 7) = 0$

V = $\{-7, +7\}$

15) $\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{x^2 + 1}{2}$

V = $\{-2, +2\}$

Bloco 2: equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$

$x^2 - 4x = 0$	$3y^2 + 8y = 0$	$4(x^2 + 1) = 4(x + 1)$	$\frac{2}{x} - \frac{x+1}{3} = \frac{x+4}{2x}$ $(x \neq 0)$
$x^2 - 4x = 0$ fatoração $x(x - 4) = 0$ 2º fator: $x - 4 = 0$; $x = 4$ 1º fator: $x = 0$ Raízes: 0 e 4. V = {0, 4}	$3y^2 + 8y = 0$ fatoração $y(3y + 8) = 0$ $3y + 8 = 0$; $y = -\frac{8}{3}$ $y = 0$ Raízes: 0 e $-\frac{8}{3}$. V = $\left\{-\frac{8}{3}, 0\right\}$	$4(x^2 + 1) = 4(x + 1)$ $4x^2 + \not{4} = 4x + \not{4}$ $4x^2 - 4x = 0$ fatoração $4x(x - 1) = 0$ $x - 1 = 0$; $x = 1$ $4x = 0$; $x = 0$ Raízes: 0 e 1. V = {0, 1}	$\frac{2}{x} - \frac{x + 1}{3} = \frac{x + 4}{2x}$ $\frac{12 - 2x(x + 1)}{6x} = \frac{3(x + 4)}{6x}$ $12 - 2x^2 - 2x = 3x + 12$ $-2x^2 - 5x = 0$ fatoração $x(-2x - 5) = 0$ $-2x - 5 = 0$; $x = -\frac{5}{2}$ $x = 0$ [eliminado, pois anula o denominador] Raiz: $-\frac{5}{2}$. V = $\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Descubra o conjunto verdade das equações (U = IR):

1) $m^2 - 6m = 0$

V = {0, 6}

2) $y^2 + 9y = 0$

V = {0, -9}

3) $4x^2 - 12x = 0$

V = {0, 3}

4) $7m^2 + 21m = 0$

V = {0, -3}

5) $8y^2 + 40y = 0$

V = {0, -5}

6) $9x^2 - 12x = 0$

V = $\{0, \frac{4}{3}\}$

7) $10y^2 - 5y = 0$

$V = \{0, \frac{1}{2}\}$

8) $x(x + 5) = 3x$

$V = \{0, -2\}$

9) $(x + 1)(x + 2) = 2$

$V = \{0, -3\}$

10) $2x(x - 1) + x(2x + 3) = 0$

$V = \{0, -\frac{1}{4}\}$

11) $\frac{x^2 + 4}{2} = \frac{5x + 6}{3}$

$V = \{0, \frac{10}{3}\}$

12) $3x(x - 1) = 6x$

$V = \{0, 3\}$

13) $\frac{2x + 1}{5} + \frac{x^2}{4} = \frac{1}{5}$

$V = \{0, -\frac{8}{5}\}$

14) $(x - 3)^2 = 9$

$V = \{0, 6\}$

15) $(x + 1)^2 + (x - 2)^2 = 5$

$V = \{0, 1\}$

Bloco 3: equações do tipo $ax^2 = 0$ ($b = 0$ e $c = 0$)

$5x^2 = 0$	$-2y^2 = 0$	$\frac{1}{3}m^2 = 0$	$\frac{2x^2 + 3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x^2 + 5}{3}$
$5x^2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{5}$ $x^2 = 0$ $x = \pm\sqrt{0} = 0$ Raiz: 0 $V = \{0\}$	$-2y^2 = 0$ $y^2 = \frac{0}{-2}$ $y^2 = 0$ $y = \pm\sqrt{0} = 0$ Raiz: 0 $V = \{0\}$	$\frac{1}{3}m^2 = 0$ $\frac{m^2}{3} = \frac{0}{3}$ $m^2 = 0$ $m = \pm\sqrt{0} = 0$ Raiz: 0 $V = \{0\}$	$\frac{2x^2 + 3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x^2 + 5}{3}$ $\frac{3(2x^2 + 3) + 1}{6} = \frac{2(x^2 + 5)}{6}$ $6x^2 + 9 + 1 = 2x^2 + 10$ $6x^2 - 2x^2 + 9 + 1 - 10 = 0$ $4x^2 = 0$ $x^2 = \frac{0}{4} = 0$ $x = \pm\sqrt{0} = 0$ Raiz: 0 $V = \{0\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Determine em $U = \mathbb{R}$ o conjunto verdade das equações:

1) $6x^2 = 0$

$V = \{0\}$

2) $-3y^2 = 0$

$V = \{0\}$

3) $\frac{x^2}{4} = 0$

$V = \{0\}$

4) $(x + 1)^2 = 2x + 1$

$V = \{0\}$

5) $(x + 3)(x - 3) = -9$

$V = \{0\}$

6) $x(2x - 3) + 3x = 0$

$V = \{0\}$

7) $\frac{x^2 + 1}{4} + \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{4}$

$V = \{0\}$

8) $4x(x + 2) = 8x$

$V = \{0\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Indique o conjunto verdade, em U = IR, das seguintes equações:

- Equações do tipo $ax^2 + c = 0$

1) $x^2 - 81 = 0$

V = {-9 +9}

2) $2x^2 - 50 = 0$

V = {-5, +5}

3) $y^2 - 121 = 0$

V = {-11, +11}

4) $3m^2 + 27 = 0$

V = ∅

5) $28y^2 = 7$

V = $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

6) $2m^2 - 800 = 0$

V = {-20, +20}

7) $98x^2 - 2 = 0$

V = $\{-\frac{1}{7}, +\frac{1}{7}\}$

8) $y^2 - 144 = 0$

V = {-12, +12}

9) $t^2 + 81 = 0$

V = ∅

10) $(x + 4)(x - 4) = 0$

V = {-4, +4}

11) $2(x^2 + 3) = 24$

V = {-3, +3}

12) $\left(\frac{y}{3} + 1\right)\left(\frac{y}{3} - 1\right) = 0$

V = {-3, +3}

13) $\frac{m^2}{5} - 5 = 0$

V = {-5, +5}

14) $\frac{3(x^2 - 1)}{5} = \frac{x^2 + 2}{2}$

V = {-4, +4}

15) $\frac{2(x^2 - 1)}{3} = 6$

V = $\{-\sqrt{10}, +\sqrt{10}\}$

- Equações do tipo $ax^2 + bx = 0$

1) $7m^2 - 21m = 0$

V = {0, 3}

2) $4x^2 + 16x = 0$

V = {0, -4}

3) $5y^2 - 50y = 0$

V = {0, 10}

4) $x^2 = -8x$

V = {0, -8}

5) $3y^2 + 2y = 5y$

V = {0, 1}

6) $6m^2 - 36m = 0$

V = {0, 6}

7) $4x^2 - 48x = 12x$

V = {0, 15}

8) $\frac{2x^2}{3} - 4x = 0$

V = {0, 6}

9) $x(2x - 1) = 3x$

V = {0, 2}

10) $2x(x + 4) - 6x = 0$

V = {0, -1}

11) $(x + 3)(x - 1) = -3$

V = {0, -2}

12) $(y + 4)^2 - 16 = 0$

V = {0, -8}

13) $2(y - 1) = 3(y^2 + 1) - 5$

V = $\{0, \frac{2}{3}\}$

14) $\frac{x^2 + 2}{3} - \frac{3x - 1}{4} = \frac{11}{12}$

V = $\{0, \frac{9}{4}\}$

15) $3m(2m - 5) = -15m$

V = {0}

- Equações do tipo $ax^2 = 0$

1) $x^2 = 0$

V = {0}

2) $8y^2 = 0$

V = {0}

3) $2(x^2 + 2) = 4$

V = {0}

4) $(2m + 3)^2 = 3(4m + 3)$

V = {0}

5) $(3y + 2)(3y - 2) = -4$

V = {0}

6) $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{3x^2 - 2}{4}$

V = {0}

b) Descubra em U = $\mathbb{N}$ o conjunto verdade das equações:

1) $2x^2 - 200 = 0$

V = {10}

2) $5y^2 = 45$

V = {3}

3) $2(x^2 + 4) = 3x + 8$

V = {0}

4) $\frac{3y + 4}{2} = \frac{y^2 + 8}{4}$

V = {0, 6}

5) $3m^2 = 2m$

V = {0}

6) $(y + 2)^2 = y + 4$

V = {0}

7) $4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 0$

V = {0}

8) $2(x^2 + 1) + 4 = 3(x + 2)$

V = {0}

9) $\frac{9x^2 - 1}{4} = 0$

V = ∅

Agora que você já fez vários exercícios sobre resolução de equações incompletas do segundo grau, veja como se resolve uma equação completa.

A resolução de uma equação completa do segundo grau exige a aplicação de uma fórmula, cuja demonstração é a seguinte:

Forma geral da equação do segundo grau: $ax^2 + bx + c = 0$	Transpondo o coeficiente c para o segundo membro e dividindo todos os termos por a, temos: $ax^2 + bx = -c$; $\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$; $x^2 + \frac{bx}{a} = \frac{-c}{a}$	Adicionando o termo $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos os membros e fazendo as transformações possíveis, resulta: $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$; $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$; $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$; $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ fórmula resolutiva

Veja alguns exemplos:

Descubra em U = $\mathbb{R}$ o conjunto verdade das equações:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 6 \end{array}\right\} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Longrightarrow x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x' = \frac{5 + 1}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Resposta: V = {2, 3}

2) $2x^2 - 11x + 5 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -11 \\ c = 5 \end{array}\right\} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} \Rightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{4} \Rightarrow x = \frac{11 \pm 9}{4}$$

$$x' = \frac{11 + 9}{4} = 5$$

$$x'' = \frac{11 - 9}{4} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $V = \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Indique o conjunto verdade em U = $\mathbb{R}$ das equações:

1) $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{array}\right\} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \Longrightarrow \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{2}$$

$$x' = \frac{5 + 3}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

Resposta: V = {1, 4}

2) $6x^2 + x - 1 = 0$

a = 6, b = 1, c = −1

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12}$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{12} \quad x' = \frac{-1 + 5}{12} = \frac{1}{3} \quad x'' = \frac{-1 - 5}{12} = -\frac{1}{2}$$

Resposta: V = $\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

3) $x^2 - 10x + 25 = 0$

a = 1, b = −10, c = 25

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} \Longrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{0}}{2}$$

$$x = \frac{10 \pm 0}{2} \quad x' = \frac{10 + 0}{2} = 5 \quad x'' = \frac{10 - 0}{2} = 5$$

Resposta: V = $\{5\}$

4) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

a = 2, b = 5, c = 2

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \Longrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x = \frac{-5 \pm 3}{4} \quad x' = \frac{-5 + 3}{4} = -\frac{1}{2} \quad x'' = \frac{-5 - 3}{4} = -2$$

Resposta: V = $\left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$

UM ELEMENTO IMPORTANTE: O DISCRIMINANTE

A partir do valor da expressão $b^2 - 4ac$ que aparece na **fórmula resolutiva**, pode-se distinguir as raízes da equação do segundo grau, ou seja, pode-se saber se elas são números reais iguais ou diferentes, ou então se são números não-reais. Por esse motivo, esta expressão recebe o nome de **discriminante** e é indicada pela letra grega delta (Δ).

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac} \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ então: } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Assim temos:

- Se Δ for positivo ($\Delta > 0$), as raízes serão números reais diferentes e receberão o nome de raízes simples.

- Se Δ for nulo ($\Delta = 0$), as raízes serão números reais iguais. Logo, a equação terá só uma raiz, que receberá o nome de raiz dupla.

- Se Δ for negativo ($\Delta < 0$), as raízes não serão números reais e receberão o nome de raízes imaginárias.

Veja os exemplos:

1) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -10 \\ c = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \\ \Delta = 100 - 36 \\ \Delta = 64 > 0 \end{array}$$

Como Δ é positivo, as raízes são números reais e diferentes (raízes simples).

2) $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ \Delta = 16 - 16 \\ \Delta = 0 \end{array}$$

Como Δ é nulo, as raízes são números reais e iguais (raiz dupla).

3) $2x^2 + 5x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \\ \Delta = 25 - 32 \\ \Delta = -7 < 0 \end{array}$$

Como Δ é negativo, as raízes não são números reais (raízes imaginárias).

VAMOS EXERCITAR

De acordo com o valor de Δ, verifique se a equação apresenta raízes simples, raiz dupla ou raízes imaginárias:

1) $x^2 + 8x - 20 = 0$

a = 1, b = 8, c = −20

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)$
$\Delta = 64 + 80$
$\Delta = 144 > 0$

Resposta: raízes simples.

2) $x^2 + 6x + 8 = 0$

a = 1, b = 6, c = 8

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$
$\Delta = 36 - 32$
$\Delta = 4 > 0$

Resposta: raízes simples.

3) $x^2 - 12x + 32 = 0$

a = 1, b = −12, c = 32

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 32$
$\Delta = 144 - 128$
$\Delta = 16 > 0$

Resposta: raízes simples.

4) $x^2 - 6x + 9 = 0$

a = 1, b = −6, c = 9

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$
$\Delta = 36 - 36$
$\Delta = 0$

Resposta: raiz dupla.

5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

a = 4, b = −4, c = 1

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$
$\Delta = 16 - 16$
$\Delta = 0$

Resposta: raiz dupla.

6) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

a = 9, b = −12, c = 4

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4$
$\Delta = 144 - 144$
$\Delta = 0$

Resposta: raiz dupla.

7) $x^2 - 3x + 3 = 0$

a = 1, b = −3, c = 3

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$
$\Delta = 9 - 12$
$\Delta = -3 < 0$

Resposta: raízes imaginárias

8) $2x^2 + 5x + 6 = 0$

a = 2, b = 5, c = 6

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$
$\Delta = 25 - 48$
$\Delta = -23 < 0$

Resposta: raízes imaginárias.

9) $x^2 + 5x + 7 = 0$

a = 1, b = 5, c = 7

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7$
$\Delta = 25 - 28$
$\Delta = -3 < 0$

Resposta: raízes imaginárias

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) A partir do valor do discriminante (Δ), classifique as raízes das seguintes equações:

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (raízes simples)

2) $x^2 + 8x + 15 = 0$ (raízes simples)

3) $x^2 - x - 6 = 0$ (raízes simples)

4) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (raízes simples)

5) $3x^2 - 4x + 2 = 0$ (raízes imaginárias)

6) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (raiz dupla)

7) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ (raiz dupla)

8) $x^2 - 14x + 49 = 0$ (raiz dupla)

9) $4x^2 - 2x + 3 = 0$ (raízes imaginárias)

10) $x^2 - 9x + 25 = 0$ (raízes imaginárias)

b) Indique o conjunto verdade em U = ℝ destas equações, determinando inicialmente o discriminante:

1) $x^2 - 15x + 50 = 0$

2) $x^2 - 20x + 100 = 0$

3) $8x^2 - 6x + 1 = 0$

4) $x^2 + x + 2 = 0$

5) $4x^2 - 3x - 1 = 0$

6) $5x^2 + 3x + 1 = 0$

7) $x^2 + 16x + 64 = 0$

8) $6x^2 - 7x - 3 = 0$

9) $15x^2 - 14x - 8 = 0$

10) $10x^2 + 8x + 2 = 0$

EQUAÇÕES NÃO-PREPARADAS

A aplicação da fórmula resolutiva exige que a equação esteja escrita na forma geral. Deste modo, se a equação não se encontra na forma geral, você precisa em primeiro lugar prepará-la, ou seja, escrevê-la na forma geral.

Observe o exemplo:

- Resolva a equação $2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$.

Resolução:

$$2x(x - 1) = 3(x^2 - 1)$$

$$2x^2 - 2x = 3x^2 - 3 \Rightarrow \underbrace{-3x^2 + 2x^2} - 2x + 3 = 0$$

$$\boxed{-x^2 - 2x + 3 = 0} \xrightarrow{} \boxed{x^2 + 2x - 3 = 0}$$

Quando a é negativo, é conveniente multiplicar ambos os membros por −1 → forma geral

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) \\ \Delta = 4 + 12 \\ \Delta = 16 \text{ (raízes simples)} \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} x' = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1 \\[2ex] x'' = \dfrac{-2 - 4}{2} = -3 \end{cases}$$

Resposta: $V = \{-3, 1\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Encontre o conjunto verdade em $U = \mathbb{R}$ das equações:

1) $x(x - 2) = 2(x + 6)$

2) $x(x + 23) + 60 = 0$

3) $x(3x - 10) = -8$

4) $(x + 2)(x - 2) + 7x = -10$

5) $(x + 3)^2 = 12 - x^2$

6) $x^2 - 8 = \frac{x}{3}$

7) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} = -\frac{1}{9}$

8) $3x(x - 2) = x - 2$

9) $\frac{x(x - 18)}{9} = -9$

10) $\frac{x}{2} - 1 = \frac{4}{x}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Resolva as seguintes equações incompletas, utilizando a fórmula resolutiva:

1) $x^2 - 4 = 0$

2) $(x + 1)^2 = 2(x + 1)$

3) $3x^2 + 6x = 0$

4) $4(x^2 + 1) = 4(x + 1)$

5) $2x^2 = 0$

6) $\frac{2x^2 + 3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{x^2 + 5}{3}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Descubra as raízes das equações:

1) $x(x - 2) + 3 = 6(x - 2)$

2) $\frac{x^2 - 1}{3} - 2x = -\frac{x - 1}{2}$

3) $\frac{15}{x} - 2 = \frac{3(12 - x)}{x^2}$

4) $\frac{x + 3}{2} - \frac{10}{3} = -\frac{2}{x + 3}$

5) $\frac{x}{x - 2} + \frac{x - 2}{x} = \frac{5}{2}$

6) $\frac{2x + 3}{x + 4} - \frac{x + 3}{x} = 0$

PROPRIEDADES DAS RAÍZES

Com relação às raízes de uma equação do segundo grau, você precisa saber que:

- A soma das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ é igual ao quociente do simétrico do coeficiente de x pelo coeficiente de x^2.

Veja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$x' + x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Logo: $\boxed{x' + x'' = \frac{-b}{a}}$

- O produto das raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ é igual ao quociente do termo independente pelo coeficiente de x^2.

Veja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \begin{cases} x' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x'' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Logo: $\boxed{x' \cdot x'' = \frac{c}{a}}$

Observe o exemplo:

- Sem resolver a equação $4x^2 - 7x + 3 = 0$, determine a soma e o produto de suas raízes.

Resolução:

$4x^2 - 7x + 3 = 0$

$a = 4$, $b = -7$, $c = 3$

$$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{3}{4}$$

Resposta: Soma: $\frac{7}{4}$; produto: $\frac{3}{4}$.

VAMOS EXERCITAR

Descubra a soma e o produto das raízes das seguintes equações:

1) $x^2 + 4x - 21 = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-21}{1} = -21$

2) $x^2 + x - 56 = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{1} = -1$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-56}{1} = -56$

3) $x^2 - 7x - 18 = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-7)}{1} = 7$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{-18}{1} = -18$

4) $x^2 + 14x + 45 = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-14}{1} = -14$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{45}{1} = 45$

5) $4x^2 - 9x + 2 = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{4} = \frac{9}{4}$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

6) $x^2 + 4x = 0$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{1} = -4$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{0}{1} = 0$

Veja agora outro exemplo:

- Descubra os sinais das raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ sem resolvê-la.

Resolução:

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-5)}{1} = 5 \\ \\ x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{4}{1} = 4 \end{array}$$

Produto positivo $\Longrightarrow$ as raízes têm o mesmo sinal.

Soma positiva $\Longrightarrow$ as raízes são positivas.

AGORA FAÇA VOCÊ

Analise os sinais das raízes das seguintes equações:

1) $x^2 + 3x - 4 = 0$

$x' + x'' = \frac{-3}{1} = -3$ — Produto negativo $\Rightarrow$ as raízes têm sinais contrários.

$x' \cdot x'' = \frac{-4}{1} = -4$ — Soma negativa $\Rightarrow$ a raiz de maior valor absoluto é negativa, e a outra é positiva.

2) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x' + x'' = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$ — Produto negativo $\Rightarrow$ as raízes têm sinais contrários.

$x' \cdot x'' = \frac{-2}{2} = -1$ — Soma positiva $\Rightarrow$ a raiz de maior valor absoluto é positiva, e a outra é negativa.

3) $x^2 + 9x + 18 = 0$

$x' + x'' = \frac{-9}{1} = -9$ — Produto positivo $\Rightarrow$ as raízes têm o mesmo sinal.

$x' \cdot x'' = \frac{18}{1} = 18$ — Soma negativa $\Rightarrow$ as raízes são negativas.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine a soma e o produto das raízes das seguintes equações:

1) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ $\left(\frac{5}{3} \text{ e } \frac{2}{3}\right)$

2) $3x^2 - 10x + 3 = 0$ $\left(\frac{10}{3} \text{ e } 1\right)$

3) $x^2 - 6x - 27 = 0$ $(6 \text{ e } -27)$

4) $x^2 + 9x + 14 = 0$ $(-9 \text{ e } 14)$

5) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $\left(1 \text{ e } \frac{1}{4}\right)$

6) $x^2 - 12x + 11 = 0$ $(12 \text{ e } 11)$

b) Analise os sinais das raízes destas equações:

1) $x^2 - 10x + 21 = 0$ (ambas positivas)

2) $4x^2 - 8x + 3 = 0$ (ambas positivas)

3) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (uma negativa e outra positiva)

4) $x^2 + 17x + 60 = 0$ (ambas negativas)

5) $6x^2 + 5x + 1 = 0$ (ambas negativas)

6) $-x^2 + 2x + 24 = 0$ (uma negativa e outra positiva)

COMPOSIÇÃO DE UMA EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

Conhecendo dois números, você poderá montar a equação do segundo grau que admite esses dois números como raízes.

Observe:

$$ax^2 + bx + c = 0 \xrightarrow[\text{por a } (a \neq 0)]{\text{Dividindo todos os termos}} \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Como: $x' + x'' = -\frac{b}{a}$ e $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$ teremos:

$$S = -\frac{b}{a} \qquad P = \frac{c}{a}$$

$$-S = \frac{b}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Veja um exemplo:

- Descubra a equação que admite as raízes 5 e −3.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} x' = 5 \\ x'' = -3 \end{array}\right| \begin{array}{l} S = 5 - 3 = 2 \\ P = 5 \cdot (-3) = -15 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 - 2x - 15 = 0 \end{array}$$

Resposta: $x^2 - 2x - 15 = 0$

Veja ainda este outro exemplo:

- Qual é a equação que apresenta as raízes −2 e $-\frac{1}{2}$?

Resolução:

$$x' = -2 \qquad S = -2 - \frac{1}{2} = \frac{-4-1}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$x'' = -\frac{1}{2} \qquad P = (-2) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{5}{2}\right)x + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

Resposta: $2x^2 + 5x + 2 = 0$

AGORA VOCÊ DEVE EXERCITAR

Componha as equações cujas raízes são:

1) 5 e 4

$$\left.\begin{array}{l} x' = 5 \\ x'' = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = 5 + 4 = 9 \\ P = 5 \cdot 4 = 20 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 - 9x + 20 = 0 \end{array}$$

Resposta: $x^2 - 9x + 20 = 0$

2) −6 e −2

$$\left.\begin{array}{l} x' = -6 \\ x'' = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = -6 - 2 = -8 \\ P = (-6) \cdot (-2) = 12 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 + 8x + 12 = 0 \end{array}$$

Resposta: $x^2 + 8x + 12 = 0$

3) $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} x' = \frac{3}{2} \\ x'' = \frac{1}{4} \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\ P = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow 8x^2 - 14x + 3 = 0 \end{array}$$

Resposta: $8x^2 - 14x + 3 = 0$

4) −3 e $\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x' = -3 \\ x'' = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = -3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \\ P = (-3) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0 \end{array}$$

Resposta: $2x^2 + 5x - 3 = 0$

UMA APLICAÇÃO DA FÓRMULA $x^2 - Sx + P = 0$

Conhecendo a soma e o produto de dois números e com o auxílio da fórmula $x^2 - Sx + P = 0$, você pode descobrir quais são esses números.

Veja esse exemplo:

Descubra dois números cuja soma é 20 e cujo produto é 75.

Resolução:

$S = 20 \quad \Rightarrow \quad x^2 - Sx + P = 0$

$P = 75 \qquad\quad x^2 - 20x + 75 = 0$

$x^2 - 20x + 75 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -20 \\ c = 75 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 75 \\ \Delta = 400 - 300 = 100 \end{array} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{20 \pm 10}{2}$$

$$x' = \frac{20 + 10}{2} = 15$$

$$x'' = \frac{20 - 10}{2} = 5$$

Resposta: 15 e 5.

VAMOS EXERCITAR

1) A soma de dois números é 13 e o produto entre eles é 40. Quais são esses números?

Resolução:

$S = 13 \quad \Rightarrow \quad x^2 - Sx + P = 0$

$P = 40 \qquad\quad x^2 - 13x + 40 = 0$

$x^2 - 13x + 40 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -13 \\ c = 40 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = 169 - 160 \\ \Delta = 9 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{13 \pm 3}{2}$$

$x' = 8$

$x'' = 5$

Resposta: 8 e 5.

2) A soma e o produto de dois números são respectivamente $\frac{9}{2}$ e 2. Determine esses números.

Resolução:

$S = \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0$

$P = 2 \qquad\quad 2x^2 - 9x + 4 = 0$

$2x^2 - 9x + 4 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = 81 - 32 \\ \Delta = 49 \end{array} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{9 \pm 7}{4}$$

$x' = 4$

$x'' = \frac{1}{2}$

Resposta: 4 e $\frac{1}{2}$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Descubra as equações que admitem as seguintes raízes:

1) 7 e 5 $(x^2 - 12x + 35 = 0)$

2) −6 e 7 $(x^2 - x - 42 = 0)$

3) −12 e 8 $(x^2 + 4x - 96 = 0)$

4) −3 e −7 $(x^2 + 10x + 21 = 0)$

5) 9 e −4 $(x^2 - 5x - 36 = 0)$

6) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ $(8x^2 - 6x + 1 = 0)$

7) −3 e $\frac{1}{5}$ $(5x^2 + 14x - 3 = 0)$

8) 4 e $-\frac{1}{4}$ $(4x^2 - 15x - 4 = 0)$

9) $-\frac{2}{3}$ e $-\frac{1}{3}$ $(9x^2 + 9x + 12 = 0)$

10) $\frac{2}{5}$ e $-\frac{1}{2}$ $(10x^2 + x - 2 = 0)$

b) Resolva:

1) Determine dois números cuja soma é 17 e cujo produto é 42. (14 e 3)

2) A soma de dois números é $\frac{13}{10}$ e o produto deles é $\frac{2}{5}$. Quais são esses números? $\left(\frac{4}{5} \text{ e } \frac{1}{2}\right)$

3) A soma de dois números é $\frac{28}{5}$ e o produto entre eles $-\frac{12}{5}$. Calcule esses números. $\left(6 \text{ e } -\frac{2}{5}\right)$

4) Determine o comprimento e a largura de um quarto de forma retangular, sabendo que a soma dessas dimensões é 9 m e que o produto entre elas é 20 m^2. (4 m e 5 m)

5) Calcule o comprimento e a largura de uma sala de forma retangular, sabendo que a soma dessas dimensões é 12 m e que o produto entre elas é 35 m^2. (7 m e 5 m)

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

O diretor do colégio deseja construir uma piscina de forma retangular cujas dimensões somem 12 m. Quais devem ser as dimensões dessa piscina para que sua área (produto das dimensões) seja a maior possível?

EQUAÇÕES LITERAIS

Uma equação do segundo grau é literal quando o coeficiente da variável ou então o termo independente for um numeral literal (letra). A resolução destas equações segue os mesmos critérios aplicados às equações numéricas.

Exemplos:

1) $x^2 + mx = 0$

$x(x + m) = 0$

→ $x + m = 0$

$x = -m$

→ $x = 0$

Então: $V = \{0, -m\}$

2) $x^2 - a^2 = 0$

$x^2 = a^2$

$x = \pm\sqrt{a^2}$

$x = \pm a$

Então: $V = \{-a, +a\}$

3) $m^2x^2 - 2mx - 3 = 0 \quad (m \neq 0)$

$a = m^2$, $b = -2m$, $c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot (-3)$
$\Delta = 4m^2 + 12m^2$
$\Delta = 16m^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2m) \pm \sqrt{16m^2}}{2 \cdot m^2} \Longrightarrow x = \frac{2m \pm 4m}{2m^2}$$

$$x' = \frac{2m + 4m}{2m^2} = \frac{6m}{2m^2} = \frac{3}{m}$$

$$x'' = \frac{2m - 4m}{2m^2} = \frac{-2m}{2m^2} = -\frac{1}{m}$$

Então: $V = \left\{-\frac{1}{m}, \frac{3}{m}\right\}$

VAMOS EXERCITAR

a) Dê o conjunto verdade das seguintes equações incompletas:

1) $x^2 - Kx = 0$

$x(x - K) = 0$

$x - K = 0$
$x = K$

$x = 0$

$V = \{0, K\}$

2) $m^2x^2 - n^2 = 0 \quad (m \neq 0)$

$m^2x^2 = n^2$

$x^2 = \frac{n^2}{m^2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{n^2}{m^2}} = \pm \frac{n}{m}$

$V = \left\{-\frac{n}{m}, +\frac{n}{m}\right\}$

3) $m(x^2 - n) = m^2 \quad (m \neq 0)$

$mx^2 - mn = m^2$

$mx^2 = m^2 + mn$

$x^2 = \frac{m^2 + mn}{m} = \frac{m(m+n)}{m} = m + n$

$x^2 = m + n \Rightarrow x = \pm\sqrt{m+n}$

$V = \left\{-\sqrt{m+n}, \sqrt{m+n}\right\}$

b) Descubra o conjunto verdade das seguintes equações completas:

1) $x^2 - 9ax - 10a^2 = 0$

$a = 1$, $b = -9a$, $c = -10a^2$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-9a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10a^2)$
$\Delta = 81a^2 + 40a^2 = 121a^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9a) \pm \sqrt{121a^2}}{2 \cdot 1} = \frac{9a \pm 11a}{2}$$

$$x' = \frac{9a + 11a}{2} = 10a$$

$$x'' = \frac{9a - 11a}{2} = -a$$

$V = \{-a, 10a\}$

2) $m^2x^2 - 5mx + 4 = 0 \quad (m \neq 0)$

$a = m^2$, $b = -5m$, $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-5m)^2 - 4 \cdot m^2 \cdot 4$
$\Delta = 25m^2 - 16m^2 = 9m^2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5m) \pm \sqrt{9m^2}}{2 \cdot m^2} = \frac{5m \pm 3m}{2m^2}$$

$$x' = \frac{5m + 3m}{2m^2} = \frac{4}{m}$$

$$x'' = \frac{5m - 3m}{2m^2} = \frac{1}{m}$$

$V = \left\{\frac{1}{m}, \frac{4}{m}\right\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Resolva as equações literais:

1) $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ $\{a, 2a\}$

2) $a^2x^2 - 4ax + 3 = 0$ $\{\frac{1}{a}, \frac{3}{a}\}$

3) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ $\{a-1, a+1\}$

4) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ $\{a-b, a+b\}$

5) $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ $\{m-2, m+2\}$

6) $x^2 + 3m^2 = 4mx$ $\{m, 3m\}$

7) $6x^2 = a(x + a)$ $\{-\frac{a}{3}, \frac{a}{2}\}$

8) $4x^2 = m(5x + m)$ $\{\frac{m}{4}, m\}$

b) Componha as equações cujas raízes são:

1) m e $-4m$ $(x^2 + 3mx - 4m^2 = 0)$

2) $\frac{a}{3}$ e $\frac{a}{4}$ $(12x^2 - 7ax + a^2 = 0)$

3) $m + 5$ e $m - 5$ $(x^2 - 2mx + m^2 - 25 = 0)$

4) $m + n$ e $m - n$ $(x^2 - 2mx + m^2 - n^2 = 0)$

5) $\frac{2}{m}$ e $\frac{3}{m}$ $(m^2x^2 - 5mx + 6 = 0)$

6) $-m$ e $\frac{m}{2}$ $(2x^2 + mx + m^2 = 0)$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Dê o conjunto verdade em $U = \mathbb{R}$ das equações:

1) $x^2 + x - 1 = 0$

$V = \{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\}$

2) $x^2 - 14x + 4 = 0$

$V = \{7 - 3\sqrt{5}, 7 + 3\sqrt{5}\}$

3) $x^2 + 2x - 12 = 0$

$V = \{-1 - \sqrt{13}, -1 + \sqrt{13}\}$

4) $\frac{x}{5} + \frac{5}{x} = \frac{26}{5}$

$V = \{1, 25\}$

5) $\frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = 3$

$V = \{-1, 3\}$

6) $\frac{1}{3x} + \frac{x+1}{x^2} = \frac{11}{12}$

$V = \{-\frac{6}{12}, 2\}$

7) $\frac{x^2}{x-2} + 5 = -\frac{4}{x-2}$

$V = \{-6, +1\}$

8) $3(x + 1)^2 - (x + 2)^2 = 23$

$V = \{-4, 3\}$

9) $x(x - 6) = -7$

$V = \{3 - \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}\}$

b) Determine as equações cujas raízes são:

1) $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$ $(x^2 - 2x - 1 = 0)$

2) $a + \sqrt{3}$ e $a - \sqrt{3}$ $(x^2 - 2ax + a^2 - 3 = 0)$

3) $3 + 2\sqrt{5}$ e $3 - 2\sqrt{5}$ $(x^2 - 6x - 11 = 0)$

4) $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$ $(abx^2 + (a+b)x + 1 = 0)$

5) $5m$ e $-2m$ $(x^2 - 3mx - 10m^2 = 0)$

6) $\frac{m}{3}$ e $-\frac{m}{4}$ $(12x^2 - mx - m^2 = 0)$

c) Indique a soma e o produto das raízes das seguintes equações:

1) $x^2 - 9x + 8 = 0$

2) $x^2 - 9x + 20 = 0$

3) $x^2 - x - 1 = 0$

4) $x^2 + 16x + 64 = 0$

5) $7x^2 + 2x + 11 = 0$

6) $x^2 - 4x + 4 = 0$

7) $x^2 - 4x + 5 = 0$

8) $64x^2 - 1 = 0$

9) $18m^2x^2 + 9m^2x + 1 = 0$

10) $20x^2 - 41x + 20 = 0$

11) $11x^2 - 121x = 0$

12) $x^2 - 11ax + 30a^2 = 0$

d) Apresentamos abaixo a soma (S) e o produto (P) de dois números. Quais são esses números?

1) $S = 9$ e $P = -90$

2) $S = \frac{1}{6}$ e $P = -\frac{1}{6}$

3) $S = 3m$ e $P = -10m^2$

4) $S = 10$ e $P = 22$

5) $S = -4$ e $P = 2$

6) $S = 2a$ e $P = a^2 - b^2$

7) $S = -12$ e $P = 32$

8) $S = 0$ e $P = -16$

9) $S = -2$ e $P = 0$

10) $S = -2$ e $P = -7$

e) Analisando o discriminante das equações abaixo, verifique se elas apresentam raízes simples, raízes imaginárias ou raiz dupla:

1) $4x^2 - 21x + 5 = 0$

2) $3x^2 + 11x - 4 = 0$

3) $2x^2 - 10x + 15 = 0$

4) $36x^2 - 12x + 1 = 0$

5) $12x^2 - 13x + 3 = 0$

6) $10x^2 - 7x + 2 = 0$

7) $9x^2 - 12x + 4 = 0$

8) $16x^2 - 40x + 25 = 0$

f) Testes:

1. A soma e o produto das raízes da equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$ são, respectivamente:

a. ( ) $-\frac{5}{2}$ e -3

b. ( ) $-\frac{5}{2}$ e $-\frac{3}{2}$

c. ( ) 5 e -3

d. ( ) -5 e -3

2. O conjunto verdade em $\mathbb{R}^*$ da equação $x - \frac{12}{x} = 1$, é:

a. ( ) $\{3, 4\}$ c. (X) $\{-3, 4\}$
b. ( ) $\{-3, -4\}$ d. ( ) $\{3, -4\}$

3. A equação do segundo grau cujas raízes são -1 e $\frac{1}{3}$ é:

a. ( ) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ c. ( ) $3x^2 + 2x + 1 = 0$
b. ( ) $3x^2 - 2x + 1 = 0$ d. (X) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

4. A equação do segundo grau que, em $\mathbb{R}$, apresenta o conjunto verdade $\left\{-3, \frac{1}{3}\right\}$ é:

a. ( ) $3x^2 - 8x - 3 = 0$ c. ( ) $3x^2 - 8x + 3 = 0$
b. (X) $3x^2 + 8x - 3 = 0$ d. ( ) $-3x^2 + 8x - 3 = 0$

5. No conjunto $\mathbb{R}$, o conjunto verdade de $-2x^2 + x + 10 = 0$ é:

a. (X) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ b. ( ) $\left\{2, -\frac{5}{2}\right\}$ c. ( ) $\emptyset$ d. ( ) $\{-2, 2\}$

6. Se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 - 12x + 9 = 0$, então:

a. ( ) $x_1 < 0$ e $x_2 < 0$ c. (X) $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$
b. ( ) $x_1 > 0$ e $x_2 < 0$ d. ( ) $x_1 > 0$ e $x_2 = 0$

7. O conjunto verdade em $\mathbb{R}$ da equação $3x - 3 + 2x^2 = 12x + 2$ é:

a. ( ) $\left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$ b. ( ) $\left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$ c. ( ) $\left\{-5, -\frac{1}{2}\right\}$ d. (X) $\left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$

8. A equação do segundo grau que, em $\mathbb{R}$, apresenta 4 e -6 como raízes é:

a. ( ) $x^2 - 2x + 24 = 0$ c. ( ) $x^2 + 10x - 24 = 0$
b. (X) $x^2 + 2x - 24 = 0$ d. ( ) $x^2 - 10x + 24 = 0$

9. O conjunto verdade em $\mathbb{R}$ da equação $\frac{x^2}{3} - \frac{3 - x^2}{6} = \frac{1}{2}$ é:

a. (X) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ c. ( ) $\{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$
b. ( ) $\{-2, 2\}$ d. ( ) $\{-3, 3\}$

10. A soma e o produto das raízes da equação $x^2 - 2x - 35 = 0$ são, em $\mathbb{R}$, respectivamente:

a. ( ) 2 e 35 b. (X) 2 e -35 c. ( ) -2 e 35 d. ( ) -2 e -35

11. As raízes da equação $x + \frac{24}{x - 1} = 3x - 4$ em $\mathbb{R} - \{1\}$ são:

a. (X) -2 e 5 c. ( ) -2 e -5
b. ( ) 2 e -5 d. ( ) Não existem.

EQUAÇÕES COM PARÂMETROS

OS PARÂMETROS

Há equações do segundo grau que apresentam uma variável denominada parâmetro. Essa variável constitui um coeficiente. Para descobrir ou discutir esse parâmetro, você deve aplicar os conhecimentos adquiridos na unidade anterior.

Vejamos alguns casos.

1.º CASO: RAÍZES REAIS OU IMAGINÁRIAS

1) Determine o maior valor inteiro de K, para que a equação $5x^2 - 10x + 2K = 0$ tenha raízes reais e desiguais.

Resolução:

condição: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

$a = 5$, $b = -10$, $c = 2K$

$b^2 - 4ac > 0$

$(-10)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 2K > 0$

$100 - 40K > 0$

$-40K > -100 \ (-1)$

$40K < 100$

$K < \frac{100}{40}$

$K < 2,5$

Resposta: 2.

2) Calcule o maior valor inteiro de m, de modo que a equação $5x^2 + 9x + m = 0$ tenha raízes reais e desiguais.

Resolução:

$a = 5$, $b = 9$, $c = m$

$b^2 - 4ac > 0$

$9^2 - 4 \cdot 5 \cdot m > 0$

$81 - 20m > 0$

$-20m > -81 \ (-1)$

$20m < 81$

$m < \frac{81}{20}$

$m < 4,05$

Resposta: 4.

3) Dada a equação $x^2 - 4x + n = 0$, determine o valor de **n**, de modo que as raízes não sejam reais.

Resolução:

condição: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$a = 1$, $b = -4$, $c = n$

$b^2 - 4ac < 0$

$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot n < 0$

$16 - 4n < 0$

$-4n < -16 \ (-1)$

$4n > 16$

$n > 4$

Resposta: $n > 4$.

4) Calcule o menor valor inteiro de a, para que a equação $x^2 - 2x + (2a - 1) = 0$ tenha raízes imaginárias.

Resolução:

$a = 1$, $b = -2$, $c = 2a - 1$

$b^2 - 4ac < 0$

$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a - 1) < 0$

$4 - 8a + 4 < 0$

$-8a < -8 \ (-1)$

$8a > 8$

$a > 1$

Resposta: 2.

5) Descubra o valor de **m** para que a equação $2x^2 - 4x + m = 0$ tenha raízes reais e iguais.

Resolução:

condição: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$a = 2$, $b = -4$, $c = m$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0$

$16 - 8m = 0$

$-8m = -16 \ (-1)$

$8m = 16$

$m = 2$

Resposta: 2.

6) Dada a equação $x^2 - 6x + (m - 1) = 0$, determine o valor de **m** para que as raízes sejam reais e iguais.

Resolução:

$a = 1$, $b = -6$, $c = m - 1$

$b^2 - 4ac = 0$

$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m - 1) = 0$

$36 - 4m + 4 = 0$

$-4m = -40 \ (-1)$

$4m = 40$

$m = 10$

Resposta: 10.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

1) Dada a equação $9x^2 - 12x + (m + 3) = 0$, determine o valor de **m** para que as raízes sejam:

a) reais e desiguais; (< 1) b) reais e iguais; (1) c) imaginárias. (> 1)

2) Dada a equação $x^2 - 12x + 2m + 6 = 0$, determine o maior valor inteiro de **m** para que as raízes sejam reais e diferentes, e o menor valor inteiro de **m** para que as raízes sejam imaginárias. (14 e 16)

3) Descubra para quais valores de **p** a equação $x^2 - 6px + 16 = 0$ admite raízes reais e iguais. $\left(-\frac{4}{3} \text{ ou } +\frac{4}{3}\right)$

2.º CASO: RELAÇÃO ENTRE AS RAÍZES

1) Determine o valor de K na equação $x^2 - Kx + 64 = 0$, para que uma raiz seja o quádruplo da outra.

Resolução:

$x' = 4x''$

$x' + x'' = \frac{-(-K)}{1} \Rightarrow x' + x'' = K$

$4x'' + x'' = K$

$5x'' = K$

$x' \cdot x'' = \frac{64}{1} \Rightarrow x' \cdot x'' = 64$

$4x'' \cdot x'' = 64$

$x''^2 = 16 \Rightarrow x'' = \pm 4$

Então: $5x'' = K$

$5(\pm 4) = K \Rightarrow K = \pm 20$

Resposta: -20 ou $+20$.

2) Na equação $x^2 - 8x + m = 0$, qual deve ser o valor de **m** para que uma raiz seja o triplo da outra?

Resolução:

$x' = 3x''$

$x' + x'' = \frac{-(-8)}{1} \Rightarrow x' + x'' = 8$

$3x'' + x'' = 8$

$4x'' = 8 \Rightarrow x'' = 2$

$x' = 3x''$

$x' = 3(2) \Rightarrow x' = 6$

$x' \cdot x'' = \frac{m}{1} \Rightarrow x' \cdot x'' = m$

$6 \cdot 2 = m \Rightarrow m = 12$

Resposta: 12.

3) Calcule o valor de **p** na equação $x^2 + px + 56 = 0$, de modo que a soma das raízes seja -15.

Resolução:

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-p}{1} = -p$

$x' + x'' = -p \Rightarrow -15 = -p$

$p = 15$

Resposta: 15.

4) Descubra o valor de **n** na equação $x^2 - nx + 10 = 0$, para que a soma das raízes seja 7.

Resolução:

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-m)}{1} = m \qquad x' + x'' = m \Rightarrow m = 7$

Resposta: 7.

5) Determine o valor de **m** na equação $x^2 - 9x + m = 0$, de modo que o quociente das raízes seja 2.

Resolução:

$\frac{x'}{x''} = 2 \Longleftrightarrow x' = 2x''$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = \frac{-(-9)}{1} = 9 \Rightarrow x' + x'' = 9$

$2x'' + x'' = 9$

$3x'' = 9 \Rightarrow x'' = 3$

$x' = 2x''$

$x' = 2 \cdot (3) \Rightarrow x' = 6$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = \frac{m}{1} = m \Rightarrow x' \cdot x'' = m$

$6 \cdot 3 = m$

$m = 18$

Resposta: 18.

6) Dada a equação $x^2 + 8x + p = 0$, descubra o valor de **p** para que o quociente das raízes seja 3.

Resolução:

$\frac{x'}{x''} = 3 \Leftrightarrow x' = 3x''$

$x' + x'' = \frac{-b}{a} = -8 \Rightarrow x' + x'' = -8$

$3x'' + x'' = -8$

$4x'' = -8$

$x'' = -2$

$x' = 3x''$

$x' = 3(-2) \Rightarrow x' = -6$

$x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = p \Rightarrow x' \cdot x'' = p$

$(-6) \cdot (-2) = p$

$p = 12$

Resposta: 12.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

1) Determine o valor de K na equação $x^2 - 16x + K = 0$, para que uma raiz seja o sétuplo da outra. (28)

2) Calcule o valor de **m** na equação $x^2 - 12x + 4m - 4 = 0$, de modo que uma raiz seja o triplo da outra. (10)

3) Determine o valor de **p** na equação $4x^2 - (4p + 1)x + 3 = 0$, de modo que a soma das raízes seja $\frac{13}{4}$. (3)

4) Determine o valor de **m** na equação $5x^2 - 26x + 2m + 3 = 0$, para que o quociente da divisão de uma raiz pela outra seja 25. (1)

5) Dada a equação $x^2 - 19x + n = 0$, descubra o valor de **n**, de modo que a diferença entre as raízes seja 5. (84)

3.º CASO: CONHECIMENTO DE UMA RAIZ E RAÍZES SIMÉTRICAS

1) Determine **m** de modo que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + m = 0$ seja igual a 2.

Resolução:

Conhecendo-se uma raiz, basta substituir a variável **x** por este valor.

$x^2 - 5x + m = 0$

$(2)^2 - 5(2) + m = 0 \Rightarrow 4 - 10 + m = 0$

$m = 6$

Resposta: 6.

2) Dada a equação $x^2 - 16x + 4p + 3 = 0$, determine o valor de **p**, de modo que uma das raízes seja igual a 1.

Resolução:

$x^2 - 16x + 4p + 3 = 0$

$(1)^2 - 16 \cdot (1) + 4p + 3 = 0$

$1 - 16 + 4p + 3 = 0 \Rightarrow 4p = 12$

$p = 3$

Resposta: 3.

3) Para que valor de K, as raízes da equação $x^2 + (K - 1)x - 4 = 0$ são simétricas?

Resolução:

Para que uma equação tenha raízes simétricas, é necessário que $b = 0$.

Então: $K - 1 = 0 \Rightarrow K = 1$

Resposta: 1.

4) Determine **m** de modo que a equação $2x^2 + (2m - 1)x - 6 = 0$ tenha raízes simétricas.

Resolução:

$2m - 1 = 0 \Longrightarrow 2m = 1$

$m = \frac{1}{2}$

Resposta: $\frac{1}{2}$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

1) Calcule o valor de **m** para que a equação $x^2 - 16x + m = 0$ tenha uma raiz igual a 10. (60)

2) Qual deve ser o valor de **p** para que a equação $x^2 - 7x + p = 0$ tenha uma raiz igual a -3? (-30)

3) Descubra o valor de **q** em cada uma das equações seguintes, para que uma das raízes seja zero.

a) $x^2 - 8x + \frac{2q - 1}{3} = 0$ $\left(\frac{3}{2}\right)$ b) $-x^2 + 5x - (q - 3) = 0$ (3) c) $2x^2 - 3x + (q - 1) = 0$ (1)

4) Determine o valor de **m**, de modo que a equação $x^2 - \left(\frac{2m}{3} + 2\right) x - 1 = 0$ tenha raízes simétricas. (-3)

5) Qual deve ser o valor de **p** para que a equação $x^2 - \left(\frac{3p}{4} - 2\right) x - 8 = 0$ tenha raízes simétricas? $\left(\frac{8}{3}\right)$

4.º CASO: EQUAÇÕES QUE APRESENTAM AS MESMAS RAÍZES

1) Determine os valores de **a** e **b** para que as equações $3x^2 - 10x + 3 = 0$ e $ax^2 + bx + 6 = 0$ tenham as mesmas raízes.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 3 = 0 \\ ax^2 + bx + 6 = 0 \end{array}\right\} \text{condição: } \frac{3}{a} = \frac{-10}{b} = \frac{3}{6}$$

Então:

$$\frac{3}{a} = \frac{3}{6} \Rightarrow a = 6 \text{ e } \frac{-10}{b} = \frac{3}{6} \Rightarrow b = -20$$

Resposta: $a = 6$ e $b = -20$.

2) Descubra os valores de **a** e **b** para que as equações $ax^2 - 41x + 40 = 0$ e $x^2 + bx + 80 = 0$ tenham as mesmas raízes.

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} ax^2 - 41x + 40 = 0 \\ x^2 + bx + 80 = 0 \end{array}\right\} \frac{a}{1} = \frac{-41}{b} = \frac{40}{80}$$

$$\frac{a}{1} = \frac{40}{80} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{-41}{b} = \frac{40}{80} \Longrightarrow b = -82$$

Resposta: $a = \frac{1}{2}$ e $b = -82$.

1) Determine o valor de **p** em cada uma das equações, de modo que as raízes sejam reais e diferentes (raízes simples).

a) $x^2 + 3x + p = 0$ $\left(p < \frac{9}{4}\right)$

b) $2x^2 - 2x + (p - 1) = 0$ $\left(p < \frac{3}{2}\right)$

c) $x^2 + x - (3p + 3) = 0$ $\left(p > -\frac{13}{12}\right)$

d) $2x^2 - 8x + (p + 2) = 0$ $(p < 6)$

2) Qual deve ser o maior valor inteiro de **m** para que a equação $3x^2 - 6x + (m - 3) = 0$ tenha raízes reais e desiguais? (5)

3) Determine o valor de **q** em cada uma das equações, de modo que as raízes sejam reais e iguais (raiz dupla).

a) $3x^2 + 6x + q = 0$ $(q = 3)$

b) $x^2 - x + (q - 1) = 0$ $\left(q = \frac{5}{4}\right)$

c) $x^2 + x - (2q - 2) = 0$ $\left(q = \frac{7}{8}\right)$

d) $(5q - 1)x^2 - 12x + 4 = 0$ $(q = 2)$

e) $qx^2 - 8x + q = 0$ $(q = \pm 4)$

f) $(3q + 1)x^2 + (2q + 2)x + q = 0$ $(q = 2 \text{ ou } q = -1)$

4) Descubra o valor de **m** em cada uma das equações, de modo que as raízes não sejam reais (raízes imaginárias).

a) $(m + 1)x^2 - 2x - 8 = 0$ $\left(m < -\frac{9}{8}\right)$

b) $mx^2 - 4x + 4 = 0$ $(m > 1)$

c) $(m + 2)x^2 - 6x + 3 = 0$ $(m > 1)$

d) $2x^2 - 5x + (m + 3) = 0$ $\left(m > \frac{1}{8}\right)$

5) Qual deve ser o menor valor inteiro de **m** para que a equação $x^2 - x + m + 4 = 0$ não tenha raízes reais? (-3)

6) Calcule o valor de K em cada uma das equações, do modo que as raízes sejam simétricas.

a) $-x^2 - (3K - 1)x + 16 = 0$ $\left(\frac{1}{3}\right)$

b) $-x^2 - \left(K - \frac{1}{2}\right)x + 4 = 0$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $x^2 + \left(\frac{2K}{7} - 2\right)x - 1 = 0$ (7)

d) $2x^2 - \left(\frac{2K}{3} - 6\right)x - 8 = 0$ (9)

e) $3x^2 + (2K - 6)x - 12 = 0$ (3)

7) Ache o valor de **p** em cada uma das equações, de modo que uma das raízes seja zero.

a) $-2x^2 + 3x - (p - 1) = 0$ (1)

b) $x^2 - x + 2p - 4 = 0$ (2)

c) $-x^2 + 9x - \left(3p - \frac{1}{5}\right) = 0$ $\left(\frac{1}{15}\right)$

d) $3x^2 + 12x + \left(\frac{2p}{3} + 2\right) = 0$ (-3)

8) Descubra o valor de **m** em cada uma das equações, de modo que:

a) $3x^2 - 2x + 5m = 0$, e uma das raízes seja 1; $\left(-\frac{1}{5}\right)$

b) $x^2 + 9x + 2m = 0$, e uma das raízes seja 3; (-18)

c) $x^2 - 12x + m = 0$, e uma das raízes seja 2; (20)

d) $x^2 + 2x + 2m + 3 = 0$, e uma das raízes seja -5. (-9)

Unidade 4

EQUAÇÕES: BIQUADRADA E IRRACIONAL

NOÇÃO DE EQUAÇÃO BIQUADRADA

Uma equação com uma variável é do quarto grau quando o maior expoente dessa variável é 4.

Exemplos:

$2x^4 - 5x^3 + 8x = 2x^2$; $x^4 - 4x^2 = 2x^3 - 5$; $3x^4 - 5 = 2x^3$

Pois bem, quando uma equação do quarto grau apresenta a variável somente com expoentes pares, ela recebe o nome particular de **equação biquadrada**.

Veja

$2x^4 - 3x^2 = 5x^0$

ou

$2x^4 - 3x^2 = 5$

$3x^4 - 2x^2 = 0$

$-x^4 + 3 = 2x^2$

VAMOS EXERCITAR

Analise as equações:

1) $3x^4 - 2x^2 = 3x^3 + 1$

2) $x^4 = 2x^2 + 8$

3) $5x^4 + x^3 = x^2 + 1$

4) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 = 5x$

5) $2x^4 + 3x^2 = 0$

6) $x^4 - 3x^2 = 4$

7) $8x^4 = 3x^3 - 1$

8) $x^2 + 1 = x^4$

9) $x^4 + 9 = 0$

Agora complete:

- São equações do quarto grau.
- Dentre elas são biquadradas as de número 2, 5, 6, 8 e 9.

FORMA GERAL

Toda equação biquadrada pode ser reduzida à forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, que se denomina **forma geral**.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ onde

- x: é a variável
- a: é o coeficiente de x^4
- b: é o coeficiente de x^2
- c: é o termo independente

Exemplo:

$$2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$$

a = 2, b = −5, c = 3

- variável: x
- coeficiente de x^4: 2
- coeficiente de x^2: −5
- termo independente: 3

EXERCÍCIOS

a) Complete o quadro:

Equação	Variável	a	b	c
$2x^4 - 7x^2 + 8 = 0$	x	2	−7	8
$-3y^4 + 5y^2 - 1 = 0$	y	−3	5	−1
$8x^4 - 10x^2 = 0$	x	8	−10	0
$-5m^4 + 12 = 0$	m	−5	0	12
$-n^4 + n^2 - 1 = 0$	n	−1	1	−1
$t^4 - 5t^2 - 7 = 0$	t	1	−5	−7

b) Reduza as equações biquadradas à forma geral:

1) $\frac{x^4 - 3}{2} = \frac{3x^2 + 1}{4}$

Forma geral: $4x^4 - 6x^2 - 14 = 0$

2) $(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 2(x^2 - 3)$

Forma geral: $x^4 - 2x^2 + 5 = 0$

3) $3(x^4 + x^2) = 2(x^2 + 4)$

Forma geral: $3x^4 + x^2 - 8 = 0$

4) $\frac{x^2 - 1}{3} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 3}{6}$

Forma geral: $x^4 - 5x^2 - 12 = 0$

5) $(x^2 - 3)(x^2 + 3) = 9(x^2 - 1)$

Forma geral: $x^4 - 9x^2 = 0$

6) $(y^2 + 2)(y^2 + 5) = 3y^2 - 1$

Forma geral: $y^4 + 4y^2 + 11 = 0$

7) $\frac{m^2 + 1}{2} - \frac{m^4 + 2}{3} = \frac{m^2}{2}$

Forma geral: $-2m^4 - 1 = 0$

8) $(2t^2 + 3)^2 = (t^2 + 3)(t^2 - 3)$

Forma geral: $3t^4 + 12t^2 + 18 = 0$

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO BIQUADRADA

Agora você vai aprender como se faz para encontrar as raízes de uma equação biquadrada.
Vejamos os seguintes casos:

1.º CASO: EQUAÇÃO INCOMPLETA DO TIPO $ax^4 + bx^2 = 0$ (c = 0)

Determinar, em U = ℝ, o conjunto verdade das equações:

1) $2x^4 - 32x^2 = 0$

fatoração

$2x^2 (x^2 - 16) = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$2x^2 = 0$ $\quad$ $x^2 = 16$

$x^2 = 0$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

$x = 0$

Então, raízes: 0, −4 e +4.

V = {−4, 0, +4}

2) $3y^4 + 27y^2 = 0$

$3y^2 (y^2 + 9) = 0$

$y^2 + 9 = 0$

$3y^2 = 0$ $\quad$ $y^2 = -9$

$y^2 = 0$ $\quad$ $y = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

$y = 0$

Então, raiz: 0.

V = {0}

Agora resolva, em U = ℝ, as equações:

1) $x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 4) = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4$

$x = \pm 2$

Resposta: V = {−2, 0, +2}

2) $m^4 = 25m^2$

$m^4 - 25m^2 = 0$

$m^2(m^2 - 25) = 0$

$m^2 = 0 \Rightarrow m = 0$

$m^2 - 25 = 0 \Rightarrow m^2 = 25$

$m = \pm 5$

Resposta: V = {−5, 0, +5}

3) $(y^2 + 1)(y^2 - 1) = 3y^2 - 1$

$y^4 - 1 = 3y^2 - 1$

$y^4 - 3y^2 = 0$

$y^2(y^2 - 3) = 0$

$y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$

$y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 3$

$y = \pm\sqrt{3}$

Resposta: V = {$-\sqrt{3}$, 0, $+\sqrt{3}$}

2.º CASO: EQUAÇÃO INCOMPLETA DO TIPO $ax^4 + c = 0$ (b = 0)

Determinar, em U = ℝ, o conjunto verdade das equações:

1) $2x^4 - 32 = 0$

$2x^4 = 32 \Rightarrow x^4 = 16$

$x^4 = 16$

$x^2 = \pm\sqrt{16}$

$x^2 = \pm 4$

$x^2 = +4$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{+4} = \pm 2$

$x^2 = -4$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$

Então, raízes: −2 e +2.

V = {−2, +2}

2) $3x^4 - 243 = 0$

$3x^4 = 243$

$x^4 = 81$

$x^2 = \pm\sqrt{81}$

$x^2 = \pm 9$

$x^2 = +9$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{+9} = \pm 3$

$x^2 = -9$ $\quad$ $x = \pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

Então, raízes: −3 e +3

V = {−3, +3}

a) Reduza as equações biquadradas à forma geral:

1) $(x^2 + 5)(x^2 - 5) = 5$ $(x^4 - 30 = 0)$

2) $\frac{y^2 + 4}{5} = \frac{y^4 - 1}{4}$ $(5y^4 - 4y^2 - 21 = 0)$

3) $3(x^4 - 9) + 2(x^2 + 10) = 0$ $(3x^4 + 2x^2 - 7 = 0)$

4) $(y^2 + 3)(y^2 + 8) = 4$ $(y^4 + 11y^2 + 20 = 0)$

b) Encontre o conjunto verdade das equações (U = ℝ):

1) $x^4 - 25 = 0$ $\{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\}$

2) $3x^4 - 12x^2 = 0$ $\{-2, 0, +2\}$

3) $(x^2 + 2)(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2)$ $\{-\sqrt{2}, 0, +\sqrt{2}\}$

4) $\frac{x^4 + 4}{4} = x^2 + 1$ $\{-2, 0, +2\}$

3.º CASO: EQUAÇÃO COMPLETA $ax^4 + bx^2 + c = 0$

As equações biquadradas completas, assim como as equações completas do segundo grau, exigem a aplicação de uma fórmula resolutiva.

Veja:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}} \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}}$$

Observe o exemplo:

Resolver, em U = ℝ, as equações:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$a = 1$, $b = -5$, $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4$

$\Delta = 25 - 16$

$\Delta = 9$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1}} = \pm\sqrt{\frac{5 \pm 3}{2}}$$

$x' = +\sqrt{\frac{5 + 3}{2}} = +2$

$x'' = +\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} = +1$

$x''' = -\sqrt{\frac{5 + 3}{2}} = -2$

$x'''' = -\sqrt{\frac{5 - 3}{2}} = -1$

Resposta: V = {−2, −1, +1, +2}

2) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$a = 1$, $b = -8$, $c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9)$

$\Delta = 64 + 36$

$\Delta = 100$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{-(-8) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot 1}} = \pm\sqrt{\frac{8 \pm 10}{2}}$$

$x' = +\sqrt{\frac{8 + 10}{2}} = +3$

$x'' = +\sqrt{\frac{8 - 10}{2}} \notin \mathbb{R}$

$x''' = -\sqrt{\frac{8 + 10}{2}} = -3$

$x'''' = -\sqrt{\frac{8 - 10}{2}} \notin \mathbb{R}$

Resposta: V = {−3, +3}

VAMOS EXERCITAR

Descubra, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$

$a = 1$, $b = -10$, $c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$

$\Delta = 100 - 36 = 64$

$x = \pm\sqrt{\frac{10 \pm 8}{2}}$

$x' = +\sqrt{\frac{10+8}{2}} = +3$

$x'' = -\sqrt{\frac{10+8}{2}} = -3$

$x''' = +\sqrt{\frac{10-8}{2}} = +1$

$x'''' = -\sqrt{\frac{10-8}{2}} = -1$

Resposta: V = $\{-3, -1, +1, +3\}$

2) $x^4 - 14x^2 - 32 = 0$

$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$

$a = 1$, $b = -14$, $c = -32$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-32)$

$\Delta = 196 + 128 = 324$

$x = \pm\sqrt{\frac{14 \pm 18}{2}}$

$x' = +\sqrt{\frac{14+18}{2}} = +4$

$x'' = -\sqrt{\frac{14+18}{2}} = -4$

$x''' = +\sqrt{\frac{14-18}{2}} \notin \mathbb{R}$

$x'''' = -\sqrt{\frac{14-18}{2}} \notin \mathbb{R}$

Resposta: V = $\{-4, +4\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Determine, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ $\{-4, -2, +2, +4\}$

2) $x^4 - 14x^2 - 32 = 0$ $\{-4, +4\}$

3) $(x^2 - 10)(x^2 - 3) = 18$ $\{-2\sqrt{3}, -1, +1, +2\sqrt{3}\}$

4) $3x^2(x^2 - 5) = 5 - x^2$ $\{-\sqrt{5}, +\sqrt{5}\}$

5) $x^4 + \frac{2}{3} = \frac{7x^2}{3}$ $\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2}, +\sqrt{2}, +\frac{\sqrt{3}}{3}\}$

6) $x^2(x^2 - 2) = 8$ $\{-2, +2\}$

7) $3x^2 - 10 = \frac{8}{x^2}$ $\{-2, +2\}$

8) $4x^2(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$ $\{-1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, +1\}$

9) $x^2(9x^2 - 1) = 9x^2 - 1$ $\{-1, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}, +1\}$

10) $(x^2 - 6)^2 = x^2$ $\{-3, -2, +2, +3\}$

NOÇÃO DE EQUAÇÃO IRRACIONAL

Equação irracional é a equação cuja variável constitui radicando.

Veja:

$3x^2 - 5x + 2 = 0$	$\sqrt{2x - 1} = 3$	$\sqrt[3]{3x - 7} = 2$
Equação racional	Equação irracional	Equação irracional

Analise as equações abaixo e coloque R se a equação for racional e I se ela for irracional:

1) $2y^4 - 5y^2 = 0$ (R)

2) $\frac{3x^2 - 1}{2} = \frac{5x + 1}{3}$ (R)

3) $\sqrt{3x + 1} - 4 = 0$ (I)

4) $3\sqrt{6x + 1} = 15$ (I)

5) $\sqrt{2}x^2 - \sqrt{3}x + \sqrt{5} = 0$ (R)

6) $\sqrt[3]{8x - 5} + 2 = 5$ (I)

7) $2x^4 + 5x^2 + \sqrt{3} = 0$ (R)

8) $\sqrt[3]{7x - 6} = \sqrt{x + 6}$ (I)

COMO OBTER O CONJUNTO VERDADE DE UMA EQUAÇÃO IRRACIONAL

Como existem diversas formas de equações irracionais, não se pode estabelecer uma regra geral de resolução para todas elas. Desse modo, examinaremos apenas os casos mais freqüentes.

1.º CASO: HÁ UM SÓ RADICAL

Isola-se o radical num dos membros e elevam-se ambos os membros a uma potência igual ao índice do radical.

Exemplos:

1) $\sqrt{x + 3} + 2 = 9$

Resolução:

$\sqrt{x + 3} + 2 = 9$

$\sqrt{x + 3} = 9 - 2$

$\sqrt{x + 3} = 7 \Rightarrow (\sqrt{x + 3})^2 = (7)^2$

$x + 3 = 49$

$x = 49 - 3$

$x = 46$

Verificação:

$\sqrt{x + 3} + 2 = 9$

$\sqrt{46 + 3} + 2 = 9$

$\sqrt{49} + 2 = 9$

$7 + 2 = 9$

$9 = 9$ (V), logo: $V = \{46\}$

2) $\sqrt{2x + 10} - 2 = 2$

Resolução:

$\sqrt{2x + 10} - 2 = 2$

$\sqrt{2x + 10} = 4 \Rightarrow (\sqrt{2x + 10})^2 = (4)^2$

$2x + 10 = 16$

$2x = 6$

$x = 3$

Verificação:

$\sqrt{2x + 10} - 2 = 2$

$\sqrt{2(3) + 10} - 2 = 2$

$\sqrt{16} - 2 = 2$

$4 - 2 = 2$

$2 = 2$ (V), logo: $V = \{3\}$

3) $\sqrt{3x + 4} + 3 = -1$

Resolução:

$\sqrt{3x + 4} + 3 = -1$

$\sqrt{3x + 4} = -4 \Rightarrow \left(\sqrt{3x+4}\right)^2 = (-4)^2$

$3x + 4 = 16$

$3x = 12$

$x = 4$

Verificação:

$\sqrt{3x + 4} + 3 = -1$

$\sqrt{3(4) + 4} + 3 = -1$

$\sqrt{16} + 3 = -1$

$4 + 3 = -1$

$7 = -1$ (F), logo: $V = \{ \}$.

4) $\sqrt[3]{3x - 1} + 3 = 5$

Resolução:

$\sqrt[3]{3x - 1} + 3 = 5$

$\sqrt[3]{3x - 1} = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{3x - 1})^3 = (2)^3$

$3x - 1 = 8$

$3x = 9$

$x = 3$

Verificação:

$\sqrt[3]{3x - 1} + 3 = 5$

$\sqrt[3]{3(3) - 1} + 3 = 5$

$\sqrt[3]{8} + 3 = 5$

$2 + 3 = 5$

$5 = 5$ (V), logo: $V = \{3\}$.

5) $\sqrt[3]{5x + 2} - 1 = 2$

Resolução:

$\sqrt[3]{5x + 2} - 1 = 2$

$\sqrt[3]{5x + 2} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{5x+2}\right)^3 = (3)^3$

$5x + 2 = 27$

$5x = 25$

$x = 5.$

Verificação:

$\sqrt[3]{5x + 2} - 1 = 2$

$\sqrt[3]{5(5) + 2} - 1 = 2$

$\sqrt[3]{27} - 1 = 2$

$3 - 1 = 2$

$2 = 2$ (V), logo: $V = \{5\}$

6) $\sqrt{x + 1} + 5 = x$

Resolução:

$\sqrt{x + 1} + 5 = x$

$\sqrt{x + 1} = x - 5 \Rightarrow (\sqrt{x + 1})^2 = (x - 5)^2$

$x + 1 = x^2 - 10x + 25$

$-x^2 + x + 10x + 1 - 25 = 0$

$-x^2 + 11x - 24 = 0$

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$$x^2 - 11x + 24 = 0 \begin{cases} x' = 8 \\ x'' = 3 \end{cases}$$

Verificação:

$x = 8$	$x = 3$
$\sqrt{x + 1} + 5 = x$	$\sqrt{x + 1} + 5 = x$
$\sqrt{8 + 1} + 5 = 8$	$\sqrt{3 + 1} + 5 = 3$
$3 + 5 = 8$	$2 + 5 = 3$
$8 = 8$ (V)	$7 = 3$ (F)

Logo, $V = \{8\}$.

7) $\sqrt{7x - 3} - 1 = x$

Resolução:

$\sqrt{7x-3} - 1 = x$

$\sqrt{7x-3} = x+1 \Rightarrow (\sqrt{7x-3})^2 = (x+1)^2$

$7x - 3 = x^2 + 2x + 1$

$-x^2 + 7x - 2x - 3 - 1 = 0$

$-x^2 + 5x - 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 1 \end{cases}$

Verificação:

$x = 4$

$\sqrt{7x-3} - 1 = x$

$\sqrt{7(4)-3} - 1 = 4$

$\sqrt{25} - 1 = 4$

$5 - 1 = 4$

$4 = 4$ (V)

$x = 1$

$\sqrt{7x-3} - 1 = x$

$\sqrt{7(1)-3} - 1 = 1$

$\sqrt{4} - 1 = 1$

$2 - 1 = 1$

$1 = 1$ (V)

Logo: $V = \{1, 4\}$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Dê, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $\sqrt{x-2} - 3 = 0$ $\{11\}$

2) $\sqrt{x+2} + 4 = 6$ $\{2\}$

3) $\sqrt{2x-5} - 5 = -2$ $\{7\}$

4) $\sqrt[3]{3x+3} - 3 = 0$ $\{8\}$

5) $\sqrt{x+5} + 1 = x$ $\{4\}$

6) $\sqrt{x-2} + 2 = x$ $\{2, 3\}$

2.º CASO: HÁ DOIS RADICAIS DE ÍNDICE 2

Isola-se um dos radicais num dos membros e elevam-se ambos os membros à segunda potência. Fazendo isso, recaímos no primeiro caso.

Veja:

Resolver, em U = IR, a equação $\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$.

Resolução:

$\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$

$\sqrt{x-7} = \sqrt{x+1} - 2 \Rightarrow (\sqrt{x-7})^2 = (\sqrt{x+1} - 2)^2$

$x - 7 = x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4$

$4\sqrt{x+1} = x + 1 + 4 - x + 7$

$4\sqrt{x+1} = 12 \Rightarrow (4\sqrt{x+1})^2 = (12)^2$

$16(x+1) = 144$

$16x + 16 = 144$

$16x = 128$

$x = 8$

Verificação:

$\sqrt{x-7} - \sqrt{x+1} = -2$

$\sqrt{8-7} - \sqrt{8+1} = -2$

$\sqrt{1} - \sqrt{9} = -2$

$1 - 3 = -2$

$-2 = -2$ (V)

Logo, $V = \{8\}$.

AGORA FAÇA VOCÊ

Encontre, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 3} = 9$

Resolução:

$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 9$

$\sqrt{x+6} = 9 - \sqrt{x-3} \Rightarrow \left(\sqrt{x+6}\right)^2 = \left(9 - \sqrt{x-3}\right)^2$

$x + 6 = 81 - 18\sqrt{x-3} + x - 3$

$18\sqrt{x-3} = 72$

$\sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{x-3}\right)^2 = (4)^2$

$x - 3 = 16$

$x = 19$

Verificação:

$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3} = 9$

$\sqrt{19+6} + \sqrt{19-3} = 9$

$\sqrt{25} + \sqrt{16} = 9$

$5 + 4 = 9$

$9 = 9 \ (V)$

Resposta: V = $\{19\}$

2) $\sqrt{x - 7} - \sqrt{x - 14} = 1$

Resolução:

$\sqrt{x-7} - \sqrt{x-14} = 1$

$\sqrt{x-7} = 1 + \sqrt{x-14} \Rightarrow \left(\sqrt{x-7}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{x-14}\right)^2$

$x - 7 = 1 + 2\sqrt{x-14} + x - 14$

$-2\sqrt{x-14} = -6$

$\sqrt{x-14} = 3 \Rightarrow \left(\sqrt{x-14}\right)^2 = (3)^2$

$x - 14 = 9$

$x = 23$

Verificação:

$\sqrt{x-7} - \sqrt{x-14} = 1$

$\sqrt{23-7} - \sqrt{23-14} = 1$

$\sqrt{16} - \sqrt{9} = 1$

$4 - 3 = 1$

$1 = 1 \ (V)$

Resposta: V = $\{23\}$

3.º CASO: HÁ UM RADICAL DUPLO

Observe o exemplo:

Resolver, em U = IR, a equação $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$.

Resolução:

$\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x} \Rightarrow \left(\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}}\right)^2 = (\sqrt{13 - x})^2$

$2 + \sqrt{x - 5} = 13 - x$

$\sqrt{x - 5} = 11 - x \Rightarrow (\sqrt{x - 5})^2 = (11 - x)^2$

$(\sqrt{x - 5})^2 = (11 - x)^2$

$x - 5 = 121 - 22x + x^2$

$-x^2 + x + 22x - 5 - 121 = 0$

$-x^2 + 23x - 126 = 0$

$x^2 - 23x + 126 = 0$

$x^2 - 23x + 126 = 0 \begin{cases} x' = 14 \\ x'' = 9 \end{cases}$

Resposta: V = {9}

Verificação:

$x = 14$

$\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$

$\sqrt{2 + \sqrt{14 - 5}} = \sqrt{13 - 14}$

$\sqrt{2 + 3} = \sqrt{-1}$

$\sqrt{5} = \sqrt{-1}$ (F)

$x = 9$

$\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} = \sqrt{13 - x}$

$\sqrt{2 + \sqrt{9 - 5}} = \sqrt{13 - 9}$

$\sqrt{2 + 2} = \sqrt{4}$

$2 = 2$ (V)

AGORA RESOLVA VOCÊ

Determine, em U = IR, o conjunto verdade da equação $\sqrt{6 + \sqrt{16 - x}} = 3$.

Resolução:

$\sqrt{6 + \sqrt{16 - x}} = 3$

$\left(\sqrt{6 + \sqrt{16 - x}}\right)^2 = (3)^2 \Rightarrow 6 + \sqrt{16 - x} = 9$

$\sqrt{16 - x} = 3$

$\left(\sqrt{16 - x}\right)^2 = (3)^2 \Rightarrow 16 - x = 9$

$-x = -7$

$x = 7$

Resposta: V = {7}

Verificação:

$\sqrt{6 + \sqrt{16 - x}} = 3$

$\sqrt{6 + \sqrt{16 - 7}} = 3$

$\sqrt{6 + \sqrt{9}} = 3$

$\sqrt{6 + 3} = 3$

$3 = 3$ (V)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Descubra, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 5} = 5$ {4}

2) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 3} = 0$ {6}

3) $\sqrt{x^2 - 5x + 2} - \sqrt{x^2 - 8x - 4} = 0$ {-2}

4) $\sqrt{3x + 1} + \sqrt{2x - 1} = 7$ {5}

5) $\sqrt{14 + y} = 1 + \sqrt{2y + 5}$ {2}

6) $\sqrt{x + 2 - \sqrt{x - 1}} = 3$ {10}

7) $\sqrt{5 + \sqrt{7 + m}} = \sqrt{m}$ {9}

8) $\sqrt{5 + 4\sqrt{a}} - 5 = 0$ {25}

9) $\sqrt{4 - \sqrt{m + 1}} - \sqrt{9 - m} = 0$ {8}

10) $\sqrt{16 + 4\sqrt{30 - x}} = 6$ {5}

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Determine o conjunto verdade das seguintes equações biquadradas (U = IR):

1) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$

2) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ $\{-2, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\}$

3) $\frac{x^2 + 4}{2} - \frac{x^2 - 1}{3} = x^4 - 13$ $\{-2, +2\}$

4) $5x^4 = 80x^2$ $\{-4, 0, +4\}$

5) $2x^4 - 162 = 0$ $\{-3, +3\}$

6) $\frac{27}{x^2} + x^2 = 12$ $\{-3, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3\}$

7) $(x^2 + 2)^2 - 9 = 0$ $\{-1, +1\}$

8) $(4x^2 + 1)(4x^2 - 1) = 0$ $\{-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\}$

9) $(9x^2 + 1)^2 - 3 = 1$ $\{-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}\}$

10) $x^4 - \frac{x^2 - 5}{4} = \frac{x^2 + 5}{3}$ $\{-1, +1\}$

b) Descubra, em U = IR, o conjunto verdade das seguintes equações irracionais:

1) $m + \sqrt{25 - m^2} = 7$ $\{3, 4\}$

2) $n - 3 = \sqrt{n - 1}$ $\{5\}$

3) $\sqrt{3a^2 - 8a - 10} + 5 = 2a$ $\{5, 7\}$

4) $\sqrt{k - 7} - \sqrt{k + 1} + 2 = 0$ $\{6\}$

5) $\sqrt{2y - 1} - 5 = 0$ $\{13\}$

6) $\sqrt[3]{3x + 2} + 5 = 7$ $\{2\}$

7) $\sqrt{7 + \sqrt{8x + 1}} = \sqrt{x + 6}$ $\{10\}$

8) $\sqrt{2y + 7} + \sqrt{3y - 18} - \sqrt{7y + 1} = 0$ $\{9\}$

9) $\frac{9}{\sqrt{2m - 3}} = \sqrt{2m - 3}$ $\{6\}$

10) $\sqrt{x - 4} = \frac{4}{\sqrt{x - 4}}$ $\{8\}$

c) Testes:

1) Sendo $A = \sqrt{3x + 4}$ e $B = 2\sqrt{x}$, o valor de **x** que torna A = B é:

a. (X) 4 b. ( ) 2 c. ( ) 5 d. ( ) −1

2) A igualdade $\frac{\sqrt{2x - 10}}{\sqrt{3x - 15}} = 1$ torna-se verdadeira para **x** igual a:

a. ( ) 1
b. ( ) 5
c. ( ) 0
d. (X) Não existe tal valor.

3) O conjunto verdade, em U = $\mathbb{R}$, da equação $8 + \sqrt{x^2 - 15x + 50} = x$, é:

a. (X) {14}
b. ( ) {3, 8}
c. ( ) {−3, 8}
d. ( ) ∅

4) A equação $x^2 - 21 = \sqrt{x^2 - 9}$ apresenta, em U = $\mathbb{Q}$, o seguinte conjunto verdade:

a. ( ) {5, 18}
b. ( ) $\{-\sqrt{18}, \sqrt{18}\}$
c. (X) {−5, +5}
d. ( ) $\{\sqrt{18}, 5\}$

5) O valor de **a**, na igualdade $\sqrt[6]{a + 2b} = \sqrt[6]{3 - 2(1 - b)}$, é:

a. (X) 1
b. ( ) 3
c. ( ) igual ao de **b**
d. ( ) o simétrico de **b**

6) Se $A = \sqrt{x - 3}$ e $\sqrt{2 + x} = 3$, então:

a. (X) A = 2
b. ( ) A = 3 + x
c. ( ) $A = \sqrt{2 + x}$
d. ( ) A = 5

7) Em U = $\mathbb{R}$, o conjunto verdade da equação $\sqrt[3]{-\sqrt{x} + 30} = 3$, é:

a. ( ) {−3, 3}
b. ( ) {3}
c. (X) {9}
d. ( ) {−3}

8) O valor de **x** que satisfaz a igualdade $\sqrt{9 - \sqrt{x}} = \sqrt{2}$ é:

a. ( ) 7
b. ( ) 9
c. ( ) −49
d. (X) 49

9) A igualdade $\sqrt{4x^2 + 5} = 2x - 5$ é satisfeita para:

a. ( ) qualquer valor de **x**
b. (X) nenhum valor de **x**
c. ( ) x = 1
d. ( ) x = −1

10) A raiz da equação $\sqrt{x^2 - x - 6} = 13 - x$ é:

a. ( ) 13
b. ( ) −13
c. (X) 7
d. ( ) −7

Unidade 5

SISTEMAS E PROBLEMAS DO SEGUNDO GRAU

NOÇÃO DE SISTEMA DO SEGUNDO GRAU

Um sistema de duas equações simultâneas com duas variáveis é do segundo grau quando a equação de grau mais elevado é do segundo grau.

Exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 8 \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

COMO OBTER O CONJUNTO VERDADE

Dentre os métodos que você já estudou, o mais conveniente para a resolução de um sistema do segundo grau é o método da substituição.

Vejamos um exemplo:

Descobrir, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o conjunto verdade do sistema:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Método da substituição		
1º passo: Isola-se uma variável numa das equações. No caso, isolemos a variável x na primeira equação.	**2º passo**: Substitui-se, na outra equação o valor encontrado da variável isolada e, a seguir, resolve-se a equação obtida.	**3º passo**: Para cada valor encontrado de uma variável, procura-se o valor correspondente da outra variável, obtendo-se assim o par ordenado.
$x + y = 8$ (1ª equação) $x = 8 - y$	$xy = 15$ $(8 - y) \cdot y = 15 \Rightarrow 8y - y^2 = 15$ $-y^2 + 8y - 15 = 0$ $y^2 - 8y + 15 = 0$ $a = 1$, $b = -8$, $c = 15$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$ $\Delta = 64 - 60 = 4$ $y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $y = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2}$ → $y' = 5$, $y'' = 3$	Como $\begin{cases} y' = 5 \\ y'' = 3 \end{cases}$ e $x = 8 - y$ temos: Se $y' = 5$, então $x = 8 - y$ $x = 8 - 5 = 3$ **par ordenado**: (3, 5) Se $y'' = 3$, então $x = 8 - y$ $x = 8 - 3 = 5$ **par ordenado**: (5, 3) Conclusão: $V = \{(3, 5), (5, 3)\}$

Resolva e indique, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o conjunto verdade dos seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} x - y = 4 \\ 2xy = 24 \end{cases}$

Resolução:

$x - y = 4 \quad 2xy = 24$

$x = 4 + y \quad 2(4+y)y = 24 \Rightarrow 8y + 2y^2 = 24$

$2y^2 + 8y - 24 = 0$

$y^2 + 4y - 12 = 0$

$y^2 + 4y - 12 = 0$

$a = 1, \; b = 4, \; c = -12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)$

$\Delta = 16 + 48 = 64$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$y = \frac{-4 \pm 8}{2}$ → $y' = 2$, $y'' = -6$

Se $y' = 2$, então $x = 4 + y$

$x = 4 + 2 = 6$

par ordenado: $(6, 2)$

Se $y'' = -6$, então $x = 4 + y$

$x = 4 - 6 = -2$

par ordenado: $(-2, -6)$

Resposta: $V = \{(6,2), (-2,-6)\}$

2) $\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m + n = 7 \end{cases}$

Resolução:

$m + n = 7$

$n = 7 - m$

$m^2 + n^2 = 25$

$(7-m)^2 + m^2 = 25$

$49 - 14m + m^2 + m^2 = 25$

$2m^2 - 14m + 49 - 25 = 0$

$2m^2 - 14m + 24 = 0$

$m^2 - 7m + 12 = 0$

$m^2 - 7m + 12 = 0$

$a = 1, \; b = -7, \; c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12$

$\Delta = 49 - 48 = 1$

$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$m = \frac{7 \pm 1}{2}$ → $m' = 4$, $m'' = 3$

Se $m' = 4$, então $n = 7 - m$

$n = 7 - 4 = 3$

par ordenado: $(3, 4)$

Se $m'' = 3$, então $n = 7 - m$

$n = 7 - 3 = 4$

par ordenado: $(4, 3)$

Resposta: $V = \{(3,4), (4,3)\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Dê, em U = ℝ × ℝ, o conjunto verdade dos seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} x - y = 8 \\ xy = 20 \end{cases}$

V = {(10, 2), (−2, −10)}

2) $\begin{cases} x - y = 7 \\ xy = -12 \end{cases}$

V = {(4, −3), (3, −4)}

3) $\begin{cases} m + n = 9 \\ mn = 20 \end{cases}$

V = {(4, 5), (5, 4)}

4) $\begin{cases} p - q = 4 \\ pq = 21 \end{cases}$

V = {(7, 3), (−3, −7)}

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

V = {(1, 3), (3, 1)}

6) $\begin{cases} m + n = 12 \\ m^2 - n^2 = 24 \end{cases}$

V = {(7, 5)}

7) $\begin{cases} a^2 + b^2 = 125 \\ a - b = 5 \end{cases}$

V = {(10, 5), (−5, −10)}

8) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ x + y = 14 \end{cases}$

V = {(6, 8), (8, 6)}

9) $\begin{cases} m^2 - n^2 = 40 \\ m - n = 4 \end{cases}$

V = {(7, 3)}

10) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ xy = 15 \end{cases}$

V = $\{(5, 3), (-\frac{9}{2}, -\frac{10}{3})\}$

OS SISTEMAS NÃO-PREPARADOS

Você já sabe que, muitas vezes, um sistema apresenta uma ou as duas equações envolvendo parênteses ou então denominadores. Nestes casos antes da aplicação do método de resolução, é necessário preparar o sistema. Veja um exemplo:

Resolver, em U = ℝ × ℝ, o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 1}{4} + \dfrac{y - 1}{3} = 2 \\ \dfrac{xy}{2} = 6 \end{cases}$$

1ª equação:

$$\frac{x+1}{4} + \frac{y-1}{3} = 2$$

$$\frac{3(x+1) + 4(y-1)}{12} = \frac{24}{12}$$

$$3x + 3 + 4y - 4 = 24$$

$$3x + 4y = 25$$

2ª equação:

$$\frac{xy}{2} = 6$$

$$xy = 12$$

Sistema preparado:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

Aplicação do método de resolução:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

$$3x + 4y = 25$$

$$3x = 25 - 4y$$

$$x = \frac{25 - 4y}{3}$$

$$xy = 12$$

$$\left(\frac{25 - 4y}{3}\right) \cdot y = 12$$

$$\frac{25y - 4y^2}{3} = 12$$

$$-4y^2 + 25y = 36$$

$$-4y^2 + 25y - 36 = 0$$

$$4y^2 - 25y + 36 = 0 \quad \begin{cases} y' = 4 \\ y'' = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Se $y' = 4 \Rightarrow x = \frac{25 - 4y}{3}$

$$x = \frac{25 - 4 \cdot (4)}{3} = 3$$

par ordenado: (3, 4)

Se $y'' = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{25 - 4y}{3}$

$$x = \frac{25 - 4 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)}{3} = \frac{16}{3}$$

par ordenado: $\left(\frac{16}{3}, \frac{9}{4}\right)$

Resposta: $V = \left\{(3, 4), \left(\frac{16}{3}, \frac{9}{4}\right)\right\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Resolva, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{3x + 1}{4} - \frac{4y - 3}{3} = \frac{11}{3} \\ \frac{xy}{2} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

1ª equação:

$$\frac{3x+1}{4} - \frac{4y-3}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{3(3x+1) - 4(4y-3)}{12} = \frac{4 \cdot 11}{12}$$

$$9x + 3 - 16y + 12 = 44$$

$$9x - 16y = 29$$

2ª equação:

$$\frac{xy}{2} = \frac{5}{2}$$

$$xy = 5$$

Sistema preparado:

$$\begin{cases} 9x - 16y = 29 \\ xy = 5 \end{cases}$$

Aplicação do método de resolução:

$$\begin{cases} 9x - 16y = 29 \\ xy = 5 \end{cases} \qquad 9x - 16y = 29 \qquad 9x = 29 + 16y \qquad x = \frac{29 + 16y}{9}$$

$$xy = 5 \qquad \left(\frac{29 + 16y}{9}\right) \cdot y = 5 \qquad 29y + 16y^2 = 45$$

$$16y^2 + 29y - 45 = 0 \quad \begin{cases} y' = 1 \\ y'' = -\frac{45}{16} \end{cases}$$

Se $y' = 1 \Rightarrow x = \frac{29 + 16y}{9}$

$x = \frac{29 + 16}{9} = 5$

par ordenado: $(5, 1)$

Se $y'' = -\frac{45}{16} \Rightarrow x = \frac{29 + 16 \cdot \left(-\frac{45}{16}\right)}{9}$

$x = -\frac{16}{9}$

par ordenado: $\left(-\frac{16}{9}, -\frac{45}{16}\right)$

Resposta: $V = \left\{(5,1), \left(-\frac{16}{9}, -\frac{45}{16}\right)\right\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Encontre, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o conjunto verdade dos seguintes sistemas:

1) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} - \dfrac{y + 3}{3} = 1 \\ \dfrac{xy}{3} = 5 \end{cases}$

$\left\{(5, 3), \left(-2, -\frac{15}{2}\right)\right\}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$

$\{(4, 3), (3, 4)\}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x - 2}{y + 1} = \dfrac{y - 1}{x + 2} \\ \dfrac{x - 1}{y + 3} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\left\{(2, 1), \left(\frac{26}{15}, -\frac{1}{15}\right)\right\}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{5} + \dfrac{y - 1}{4} = 2 \\ xy = 10 \end{cases}$

$\left\{(2, 5), \left(\frac{25}{4}, \frac{8}{5}\right)\right\}$

PROBLEMAS DO 2º GRAU

Agora você vai aprender como se resolvem problemas do segundo grau, isto é, sentenças expressas em linguagem comum que, quando expressas em linguagem matemática, originam uma equação do segundo grau ou, então, um sistema do segundo grau.

Inicialmente vamos fazer uma pequena recapitulação.

Complete os blocos:

Bloco 1

Linguagem comum	**Linguagem matemática**
Um número	x
O dobro de um número	$2x$
O triplo de um número	$3x$
O quadrado de um número	x^2
O quádruplo do quadrado de um número	$4x^2$
O quadrado do dobro de um número	$(2x)^2$
Os quadrados de dois números inteiros e consecutivos	x^2 e $(x+1)^2$

Bloco 2

Linguagem comum	**Linguagem matemática**
O quadrado de um número par	$(2x)^2$
O quadrado de um número ímpar	$(2x+1)^2$
O quadrado do inverso de um número	$\left(\frac{1}{x}\right)^2$
A terça parte do quadrado de um número	$\frac{x^2}{3}$
A raiz quadrada de um número	$\sqrt{x}$
A raiz quadrada do dobro de um número aumentada de três unidades	$\sqrt{2x}+3$

Agora passe para a linguagem matemática as seguintes sentenças dadas em linguagem comum:

1) A soma de dois números inteiros é igual a 8, e o produto desses números é igual a 15.

Linguagem matemática: $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$

2) A raiz quadrada de um número aumentado de 3 é igual a 3.

Linguagem matemática: $\sqrt{x+3} = 3$

3) A raiz quadrada do triplo de um número aumentada de 4 é igual a 10.

Linguagem matemática: $\sqrt{3x} + 4 = 10$

4) Subtraindo do quadrado de um número o quíntuplo desse número obtém-se 14.

Linguagem matemática: $x^2 - 5x = 14$

5) A soma de dois números inteiros é igual a 5, e a soma dos quadrados desses números é igual a 13.

Linguagem matemática: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$

A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA

Para encontrar a solução de um problema deve-se resolver a equação ou o sistema correspondente à linguagem matemática e, a seguir, discutir as raízes encontradas.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1:

A soma do número 10 com o quadrado de um número real é igual a 19. Descubra esse número.

Linguagem matemática:

$x^2 + 10 = 19$

Resolução:

$x^2 + 10 = 19$

$x^2 = 19 - 10$

$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

Solução do problema:

O número é +3 ou −3, logo, o problema admite duas soluções, pois:

$(+3)^2 + 10 = 19$ (V) e

$(-3)^2 + 10 = 19$ (V)

Resolva:

1) Adicionando 2 ao quadrado de um número real, obtém-se 18. Determine esse número.

Linguagem matemática:

$x^2 + 2 = 18$

Resolução:

$x^2 + 2 = 18$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

Solução do problema:

O número é +4 ou −4, pois:

$(+4)^2 + 2 = 18$ (V) e

$(-4)^2 + 2 = 18$ (V)

2) Subtraindo 3 do dobro do quadrado de um número real, obtém-se 47. Calcule esse número.

Linguagem matemática:

$2x^2 - 3 = 47$

Resolução:

$2x^2 - 3 = 47$

$2x^2 = 50$

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

Solução do problema:

O número é +5 ou −5, pois:

$2(+5)^2 - 3 = 47$ (V)

$2(-5)^2 - 3 = 47$ (V)

Exemplo 2:

Determinar o número real cujo quadrado é igual ao seu dobro.

Linguagem matemática:

$x^2 = 2x$

Resolução:

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$ → $x = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = 2$

Solução do problema:

O número é **0** ou **2**, pois:

$(0)^2 = 2 \cdot (0)$ (V) e

$(2)^2 = 2 \cdot (2)$ (V)

Resolva:

1) O dobro do quadrado de um número real é igual ao seu sêxtuplo. Descubra esse número.

Linguagem matemática:

$2x^2 = 6x$

Resolução:

$2x^2 = 6x$

$2x^2 - 6x = 0$

$2x(x-3) = 0$ → $2x = 0$, $x = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = 3$

Solução do problema:

O número é 0 ou 3, pois

$2 \cdot (0)^2 = 6 \cdot (0)$ (V) e

$2 \cdot (3)^2 = 6 \cdot (3)$ (V)

2) Adicionando o quádruplo de um número real ao seu quadrado obtém-se zero. Qual é esse número?

Linguagem matemática:

$x^2 + 4x = 0$

Resolução:

$x^2 + 4x = 0$

$x(x+4) = 0$ → $x = 0$ ou $x + 4 = 0$

$x = -4$

Solução do problema:

O número é 0 ou −4, pois:

$(0)^2 + 4 \cdot (0) = 0$ (V)

e

$(-4)^2 + 4 \cdot (-4) = 0$ (V)

Exemplo 3:

Determinar o número real, sabendo que, adicionando o seu dobro ao triplo do seu quadrado obtém-se 16.

Linguagem matemática:

$3x^2 + 2x = 16$

Resolução:

$3x^2 + 2x = 16$

$3x^2 + 2x - 16 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16) \\ \Delta = 4 + 192 = 196 \end{array}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm 14}{6}$$

$$x' = \frac{-2 + 14}{6} = 2$$

$$x'' = \frac{-2 - 14}{6} = -\frac{8}{3}$$

Solução do problema:

O número é 2 ou $-\frac{8}{3}$, pois:

$3 \cdot (2)^2 + 2 \cdot (2) = 16$ (V)

$3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = 16$ (V)

Resolva:

Qual é o número real cuja metade acrescida de 14 é igual ao seu quadrado?

Linguagem matemática:

$\frac{x}{2} + 14 = x^2$

Resolução:

$\frac{x}{2} + 14 = x^2$

$x + 28 = 2x^2$

$2x^2 - x - 28 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -1 \\ c = -28 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-28) \\ \Delta = 1 + 224 = 225 \end{array}$$

$$x = \frac{1 \pm 15}{4}$$

$$x' = \frac{1 + 15}{4} = 4$$

$$x'' = \frac{1 - 15}{4} = -\frac{7}{2}$$

Solução do problema:

O número é 4 ou $-\frac{7}{2}$, pois:

$\frac{(4)}{2} + 14 = (4)^2$ (V) e

$\frac{\left(-\frac{7}{2}\right)}{2} + 14 = \left(-\frac{7}{2}\right)^2$ (V)

Exemplo 4:

As idades de dois irmãos são expressas por dois números inteiros e consecutivos. Descubra essas idades, sabendo que o quadrado da idade do mais jovem é igual ao quíntuplo da idade do mais velho, mais 1.

Linguagem matemática:

$x^2 = 5(x + 1) + 1$

Resolução:

$x^2 = 5(x + 1) + 1$

$x^2 = 5x + 5 + 1$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$a = 1$, $b = -5$, $c = -6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 25 + 24 = 49$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = \dfrac{5 \pm 7}{2}$

$x' = \dfrac{5 + 7}{2} = 6$

$x'' = \dfrac{5 - 7}{2} = -1$

Solução do problema:

$x = 6$, então:

mais jovem: 6 anos;

mais velho: 7 anos.

Resolva:

Têm-se dois números positivos inteiros e consecutivos tais que o quadrado do maior é igual ao décuplo do menor, mais 1. Determine esses números.

Linguagem matemática:

$(x+1)^2 = 10x + 1$

Resolução:

$(x+1)^2 = 10x + 1$

$x^2 + 2x + 1 = 10x + 1$

$x^2 + 2x - 10x + 1 - 1 = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x-8) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$

Solução do problema

$x = 8$, então:

número menor: 8

número maior: 9

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

1) Têm-se três números positivos, inteiros e consecutivos. Sabendo que o produto do menor pelo maior é igual ao quíntuplo do outro, mais cinco, descubra esses números. (5, 6 e 7)

2) Determine três números pares e consecutivos tais que o quadrado do maior seja igual à soma dos quadrados dos outros dois. (6, 8 e 10)

3) Têm-se três números positivos, inteiros e consecutivos, de tal maneira que a soma dos quadrados dos dois primeiros é igual ao quadrado do maior. Descubra esses números. (3, 4 e 5)

4) Calcule o número positivo cujo quadrado, diminuído de 9, seja igual ao seu quíntuplo mais 5. (7)

5) Calcule o número real que, adicionado ao seu inverso, resulte em $\frac{17}{4}$. (4 ou $\frac{1}{4}$)

6) A diferença entre o dobro do produto de dois números positivos, inteiros e consecutivos e o quíntuplo da soma deles é igual a 5. Determine esses números. (5 e 6)

7) Determine dois números positivos inteiros e consecutivos, cuja soma dos seus quadrados seja igual a 41. (4 e 5)

8) As idades de dois irmãos são representadas por dois números pares e consecutivos cujo produto é 120. Calcule estas idades. (10 anos e 12 anos)

9) Adicionando $\frac{3}{4}$ de um número real ao dobro do seu quadrado obtém-se 35. Qual é esse número? (4 ou $-\frac{35}{8}$)

10) Uma pessoa, perguntada sobre a sua idade, respondeu: subtraindo 360 do quadrado de minha idade, obtém-se o dobro de minha idade. Qual é a idade dessa pessoa? (20 anos)

Exemplo 5:

Adicionando à raiz quadrada de um número esse mesmo número, obtém-se 12. Qual é esse número?

Linguagem matemática:

$\sqrt{x} + x = 12$

Resolução:

$\sqrt{x} = 12 - x$

$(\sqrt{x})^2 = (12 - x)^2 \Rightarrow x = 144 - 24x + x^2$

$x^2 - 25x + 144 = 0$

$$\left.\begin{matrix} a = 1 \\ b = -25 \\ c = 144 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 \\ \Delta = 625 - 576 = 49 \end{matrix}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{25 \pm 7}{2} \quad \begin{matrix} x' = 16 \\ x'' = 9 \end{matrix}$$

Solução do problema:

$x = 16 \Rightarrow \sqrt{x} + x = 12$

$\sqrt{16} + 16 = 12$

$4 + 16 = 12$ (F)

$x = 9 \Rightarrow \sqrt{x} + x = 12$

$\sqrt{9} + 9 = 12$

$3 + 9 = 12$ (V)

Logo, a solução é 9.

Resolva:

Adicionando 1 à raiz quadrada de um número aumentado de 1, obtém-se esse mesmo número. Determine esse número.

Linguagem matemática:

$\sqrt{x+1} + 1 = x$

Resolução:

$\sqrt{x+1} + 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 1$

$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2$

$x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 - 3x = 0$

$x(x-3) = 0 \quad \begin{matrix} x = 0 \\ x - 3 = 0 \\ x = 3 \end{matrix}$

Solução do problema:

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} + 1 = x$

$\sqrt{0+1} + 1 = 0$

$1 + 1 = 0$ (F)

$x = 3 \Rightarrow \sqrt{x+1} + 1 = x$

$\sqrt{3+1} + 1 = 3$

$2 + 1 = 3$ (V)

Logo, a solução é 3.

Exemplo 6:

As idades de dois irmãos são representadas por números tais que a soma deles é 12 e o produto deles é 35. Determine essas idades.

Linguagem matemática:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35 \end{cases}$$

Resolução:

$x + y = 12 \Rightarrow x = 12 - y$

$xy = 35 \Rightarrow (12 - y) \cdot y = 35$

$12y - y^2 = 35$

$y^2 - 12y + 35 = 0$ → $y' = 7$; $y'' = 5$

$y' = 7 \Rightarrow x = 12 - y$

$x = 5$

$y'' = 5 \Rightarrow x = 12 - y$

$x = 7$

Solução do problema:

As idades são:

5 anos e 7 anos.

Resolva:

Determine dois números positivos cuja diferença é 1 e cuja diferença entre seus quadrados é 7.

Linguagem matemática:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 - y^2 = 7 \end{cases}$$

Resolução:

$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y$

$x^2 - y^2 = 7 \Rightarrow (1 + y)^2 - y^2 = 7$

$1 + 2y + y^2 - y^2 = 7$

$2y = 6$

$y = 3$

$y = 3 \Rightarrow x = 1 + y$

$x = 1 + 3 = 4$

Solução do problema:

Os números são: 3 e 4.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva:

1) Adicionando-se 6 à raiz quadrada do triplo de um número, obtém-se esse mesmo número. Qual é esse número? (12)

2) Decomponha o número 15 em duas parcelas cujo produto seja 50. (10 e 5)

3) Decomponha o número 10 em duas parcelas tais que a diferença entre os quadrados dessas parcelas seja 20. (6 e 4)

4) Têm-se dois números inteiros e positivos tais que o dobro do maior mais o triplo do menor é igual a 13, e o quadrado do maior mais o menor é igual a 26. Quais são esses números? (5 e 1)

5) A razão de dois números reais é $\frac{3}{4}$. Determine esses números, sabendo que o produto deles é 300. (15 e 20 ou −15 e −20)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva, em $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, os sistemas:

1) $\begin{cases} xy = 2 \\ x^2y - xy^2 = 7 \end{cases}$

$\left\{\left(4, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -4\right)\right\}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{x-1}{4} \\ (x+y)^2 + y(y-2x) = 6 \end{cases}$

$\left\{\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right\}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{3} - \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{x+1}{6} \\ (x+y)(x-y) = -24 \end{cases}$

$\left\{(1, 5), \left(\frac{47}{5}, \frac{53}{5}\right)\right\}$

4) $\begin{cases} (x+y)(x-y) = 12 \\ \dfrac{x+2}{2} + \dfrac{y-2}{3} = 3 \end{cases}$

$\left\{(4, 2), \left(\frac{76}{5}, -\frac{74}{5}\right)\right\}$

b) Resolva os problemas:

1) Dividindo a soma dos quadrados de três números inteiros e consecutivos pela soma destes mesmos números, obtém-se quociente 5 e resto 2. Quais são estes números? (4, 5 e 6)

2) Comprei algumas maçãs por Cr$ 60,00. Se tivesse comprado mais 4 maçãs com a mesma quantia, cada uma teria custado Cr$ 4,00 menos. Quantas maçãs comprei? (6)

3) Subtraindo o quíntuplo de um número positivo do triplo do seu quadrado, obtém-se 50. Qual é esse número? (5)

4) Decomponha o número 20 em duas parcelas cujo produto seja 96. (12 e 8)

5) Decomponha o número 30 em dois fatores cuja soma seja 11. (5 e 6)

6) A soma de dois números é 12. Adicionando o produto deles ao número maior, obtém-se 42. Descubra esses números. (7 e 5 ou 6 e 6)

c) Testes:

1) As idades de dois irmãos são as raízes da equação: $x(x - 20) = -100$. Com isto podemos afirmar que:

a. (X) eles são gêmeos.
b. ( ) um deles ainda não nasceu.
c. ( ) os dois ainda não nasceram.
d. ( ) não é nada disso.

2) Houve um jogo de futebol entre os times A e B. O goleiro do time A sofreu um número de gols igual à soma algébrica das raízes da equação: $x(x - 1) = 20$. O goleiro do time B sofreu um número de gols igual à soma algébrica das raízes da equação: $x(x - 2) = 3$. Com base nisto podemos dizer que:

a. ( ) houve empate.
b. ( ) B ganhou.
c. (X) A ganhou.
d. ( ) nada se pode concluir.

3) Indique o número positivo cujo quadrado diminuído de 9 é igual ao seu quíntuplo mais 5 unidades.

a. ( ) 4
b. ( ) 5
c. ( ) 6
d. (X) 7

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE PONTOS

UM POUCO DE HISTÓRIA

Foi o matemático e filósofo francês René Descartes (1596–1660) quem criou a Geometria Algébrica, também chamada Geometria Analítica ou Geometria Cartesiana. Até então, a Geometria que se conhecia era a Geometria dos gregos ou Geometria objetiva.

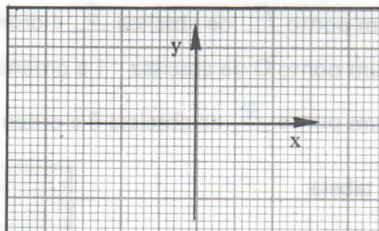
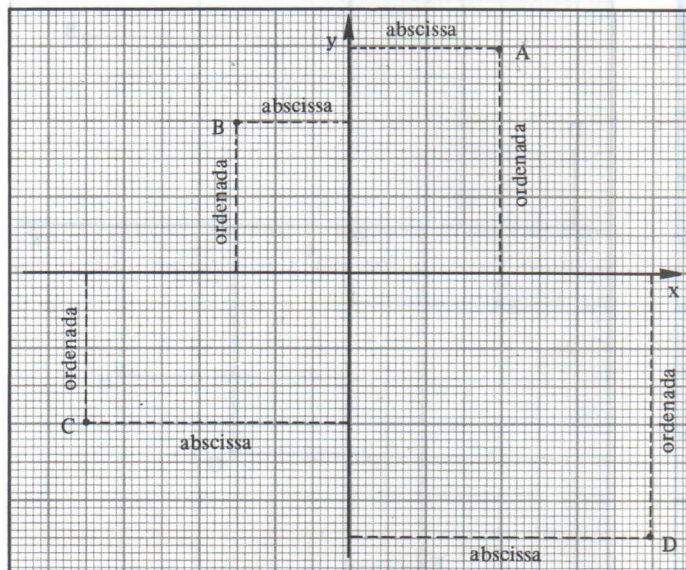
Descartes tratou do problema subjetivo, ou seja, estudou os fenômenos da Geometria através da Álgebra, ciência abstrata, estabelecendo relações entre figuras geométricas e equações algébricas. Deste modo, a cada linha Descartes fez corresponder uma equação; assim, a cada propriedade da equação corresponde uma propriedade da linha.

O PLANO CARTESIANO

Para atingir seu objetivo, Descartes passou a estudar uma maneira de traduzir algebricamente a posição de um ponto num plano. Criou então um sistema de representação gráfica de pontos e linhas, que passou a ser chamado de **sistema cartesiano** ou **plano cartesiano.**

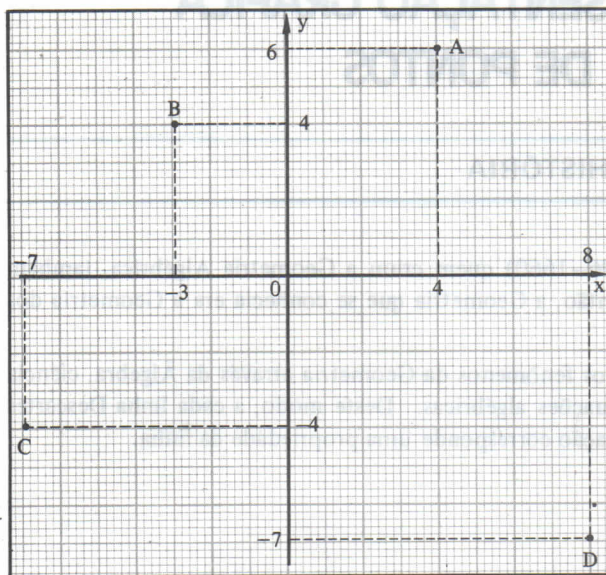
O plano cartesiano consiste em dois eixos perpendiculares entre si e representados por x e y.

O eixo x chama-se **eixo das abscissas.**

O eixo y chama-se **eixo das ordenadas.**

Deste modo, temos:

Abscissa de um ponto: é o valor algébrico da projetante desse ponto sobre o eixo das ordenadas.

Ordenada de um ponto: é o valor algébrico da projetante desse ponto sobre o eixo das abscissas.

A abscissa e a ordenada de um ponto constituem as **coordenadas desse ponto.**

Vejamos um exemplo:

Note que:

Ponto	Abscissa	Ordenada	Indicação
A	4	6	A(4, 6)
B	−3	4	B(−3, 4)
C	−7	−4	C(−7, −4)
D	8	−7	D(8, −7)

Perceba que, na indicação, o primeiro valor corresponde à abscissa e o segundo corresponde à ordenada.

Assim:

X(−2, 3) significa um ponto X de abscissa −2 e ordenada 3.

EXERCITE

a) Complete adequadamente:

1) A indicação M(3, 4) significa um ponto M de abscissa 3 e ordenada 4.

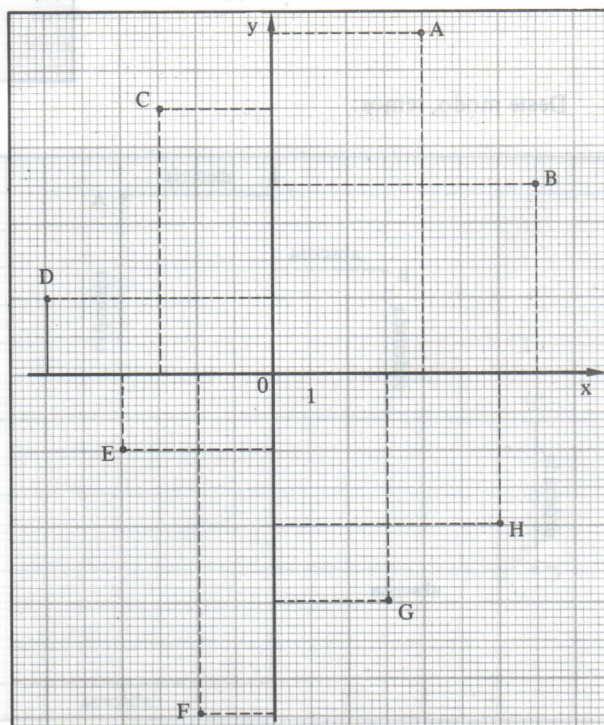
2) A indicação P(−4, −5) significa um ponto P de abscissa −4 e ordenada −5.

3) O símbolo L(6, −2) indica um ponto L de abscissa 6 e ordenada −2.

4) O símbolo Q(−1, 5) indica um ponto Q de abscissa −1 e ordenada 5.

5) O símbolo R(8, −7) indica um ponto R de abscissa 8 e ordenada −7.

b) Observe o gráfico e complete a tabela:

Ponto	Abscissa	Ordenada	Indicação
A	4	9	A (4, 9)
B	7	5	B (7, 5)
C	−3	7	C (−3, 7)
D	−6	2	D (−6, 2)
E	−4	−2	E (−4, −2)
F	−2	−9	F (−2, −9)
G	3	−6	G (3, −6)
H	6	−4	H (6, −4)

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

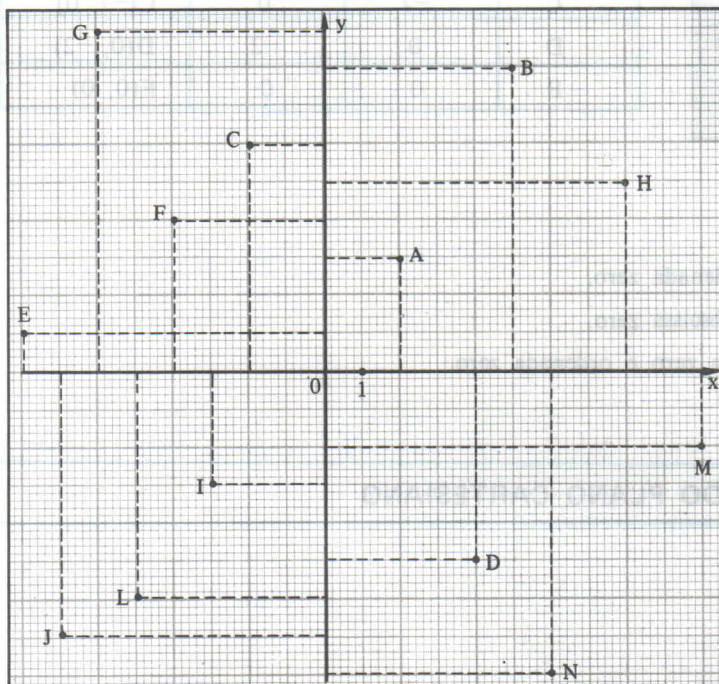
a) Complete corretamente:

1) O símbolo A (4, −3) significa um ponto A de abscissa 4 e ordenada −3.

2) O símbolo B (5, 5) significa um ponto B de abscissa 5 e ordenada 5.

3) O símbolo P(−4, −6) significa um ponto P de abscissa −4 e ordenada −6.

4) O símbolo T(−3, 7) significa um ponto T de abscissa −3 e ordenada 7.

b) Observe o gráfico:

Agora complete a tabela:

Ponto	Abscissa	Ordenada	Indicação
A	2	3	A (2, 3)
B	5	8	B (5, 8)
C	−2	6	C (−2, 6)
D	4	−5	D (4, −5)
E	−8	1	E (−8, 1)
F	−4	4	F (−4, 4)
G	−6	9	G (−6, 9)
H	8	5	H (8, 5)
I	−3	−3	I (−3, −3)
J	−7	−7	J (−7, −7)
L	−5	−6	L (−5, −6)
M	10	−2	M (10, −2)
N	6	−8	N (6, −8)

c) Represente graficamente os pontos:

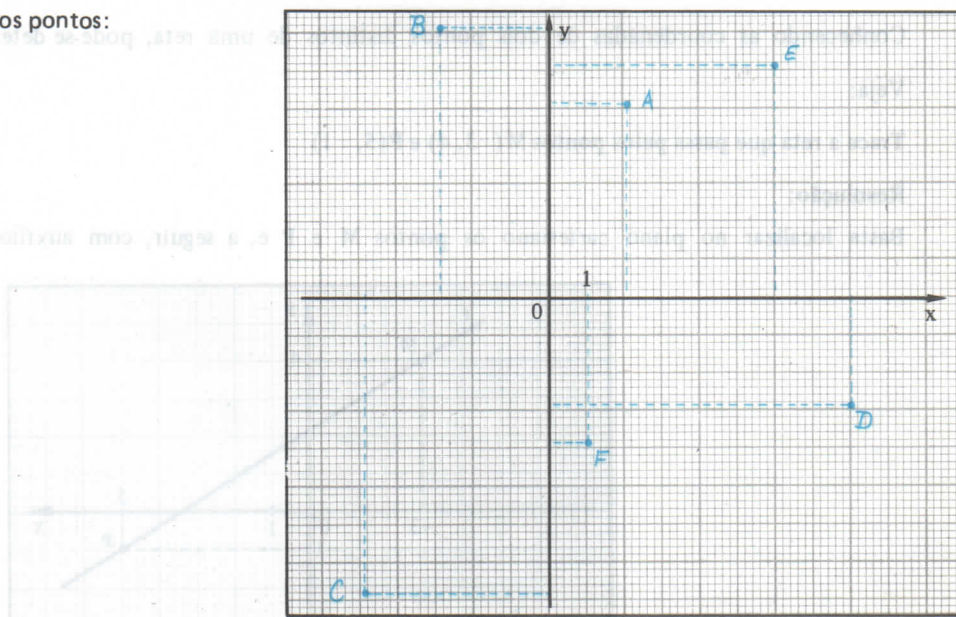
1) A (2, 5)

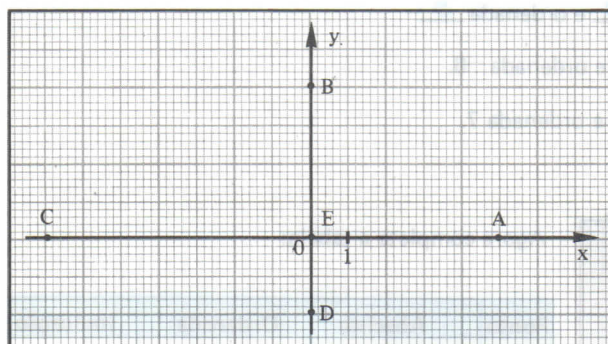
2) B (−3, 7)

3) C (−5, −8)

4) D (8, −3)

5) E (6, 6)

6) F (1, −4)

PONTOS ESPECIAIS

Observe o gráfico:

De acordo com o gráfico, temos:

Ponto	Abscissa	Ordenada	Indicação
A	5	0	A(5, 0)
B	0	4	B(0, 4)
C	−7	0	C(−7, 0)
D	0	−2	D(0, −2)
E	0	0	E(0, 0)

Com isto você percebe que:

- Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada zero.
- Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa zero.
- O ponto intersecção dos eixos tem abscissa zero e ordenada zero.

APLICAÇÕES DO PLANO CARTESIANO

Vamos estudar as seguintes aplicações:

- A determinação de uma reta.
- A determinação da intersecção de duas retas.

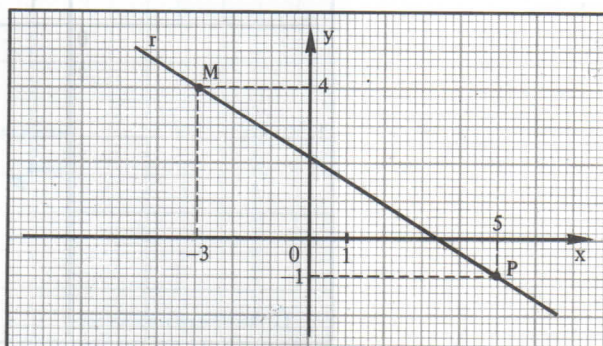
A determinação de uma reta

Conhecendo as coordenadas de dois pontos distintos de uma reta, pode-se determinar essa reta.

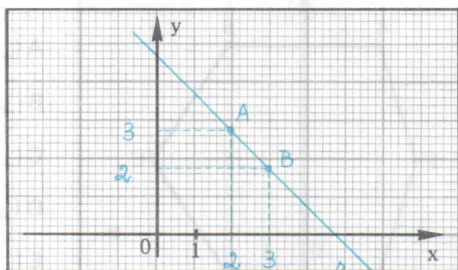
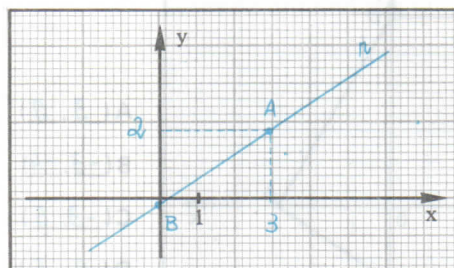
Veja:

Trace a reta que passa pelos pontos M(−3, 4) e P(5, −1).

Resolução:

Basta localizar no plano cartesiano os pontos M e P e, a seguir, com auxílio de uma régua, traçar a reta.

VAMOS EXERCITAR

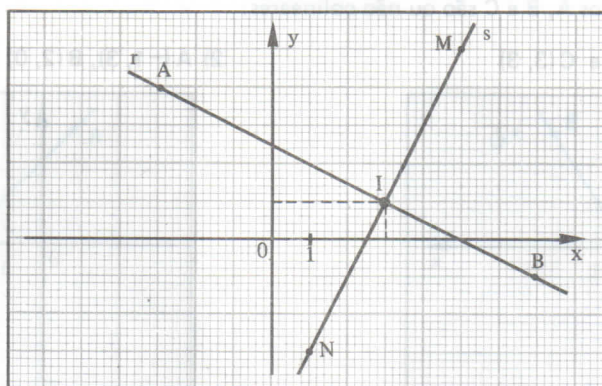
Determine a reta r que passa pelos pontos:

1) A (2, 3) e B (3, 2)

2) A (3, 2) e B (0, 0)

A determinação da intersecção de duas retas

Considere o seguinte problema:

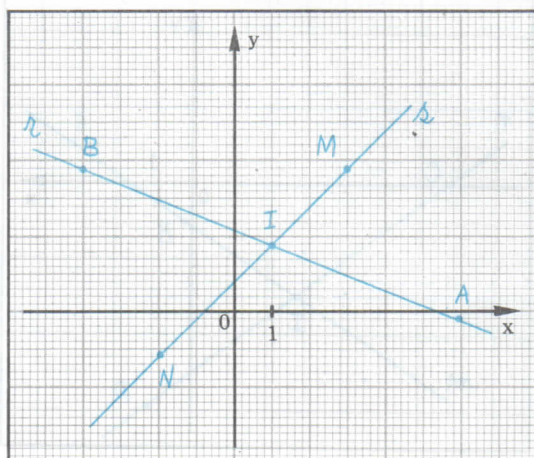
Determine o ponto de intersecção das retas r e s, sabendo que r passa pelos pontos A(−3, 4) e B(7, −1), e s passa pelos pontos M(5, 5) e N(1, −3).

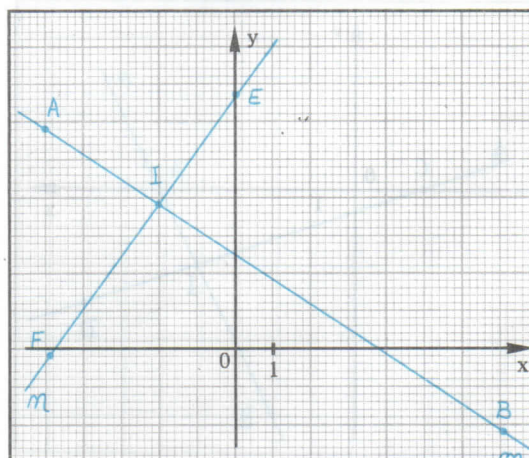
Resolução:

Basta localizar no plano cartesiano os pontos A, B, M e N, a seguir traçar as retas e observar as coordenadas do ponto determinado pela intersecção das retas.

Logo, I(3, 1).

AGORA FAÇA VOCÊ

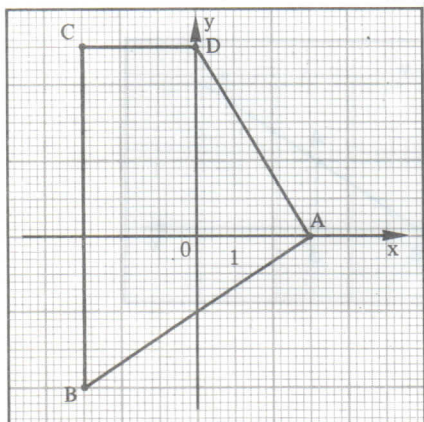
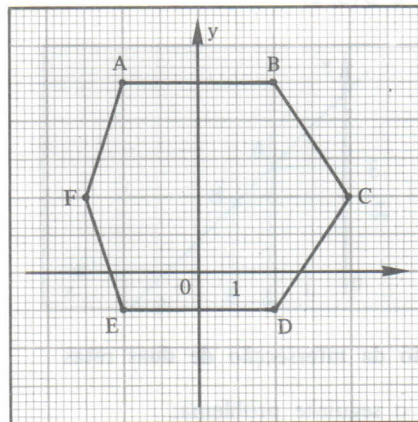
Dê as coordenadas do ponto de intersecção das retas:

1) r passa pelos pontos A (6, 0) e B (−4, 4)
   s passa pelos pontos M (3, 4) e N (−2, −1)

Resposta: I (1, 2).

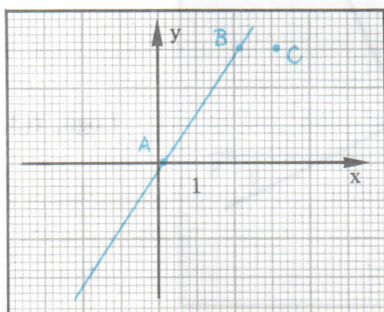
2) m passa pelos pontos A (−5, 6) e B (7, −2)
   n passa pelos pontos E (0, 7) e F (−5, 0)

Resposta: I (−2, 4).

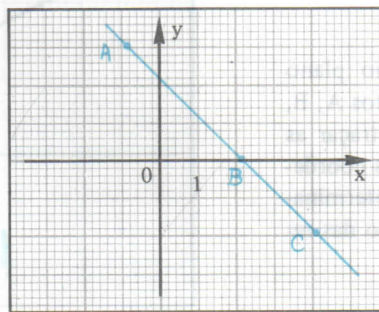
VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dê as coordenadas dos vértices do polígono:

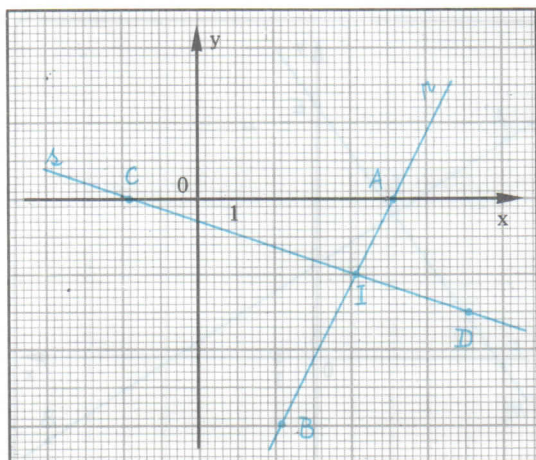
1)

2)

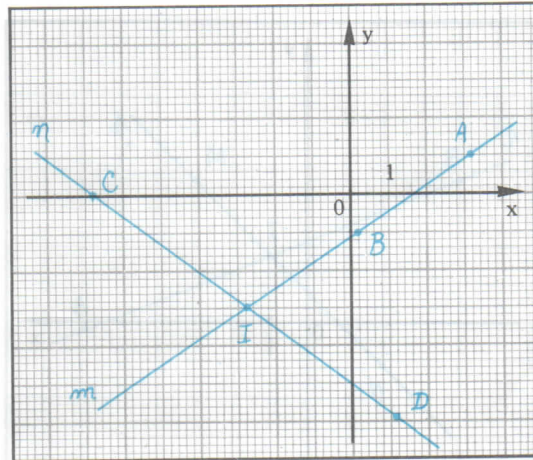
b) Verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares:

1) A (0, 0), B (2, 3) e C (3, 3)

Resposta: Não são colineares.

2) A (−1, 3), B (2, 0) e C (4, −2)

Resposta: São colineares.

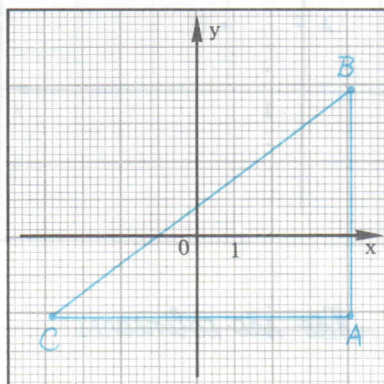
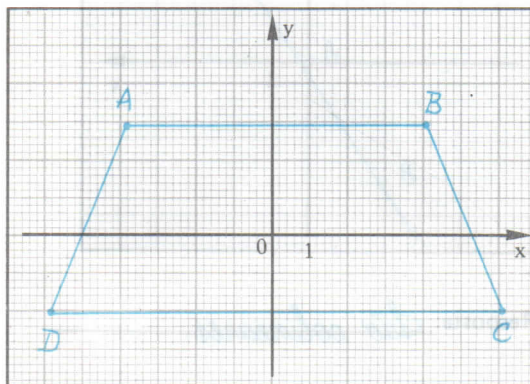
c) Dê as coordenadas do ponto de intersecção I das retas:

1) r passa pelos pontos A (5, 0) e B (2, −6)
s passa pelos pontos C (−2, 0) e D (7, −3)

Resposta: I (4, -2).

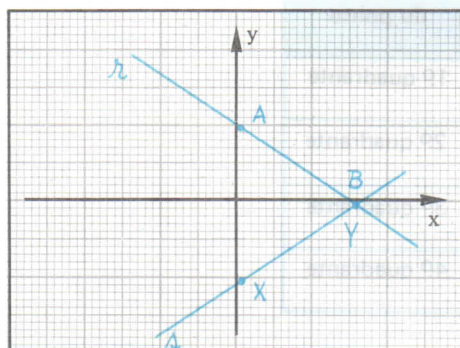
2) m passa pelos pontos A (3, 1) e B (0, −1)
n passa pelos pontos C (−7, 0) e D (1, −6)

Resposta: I (-3, -3).

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

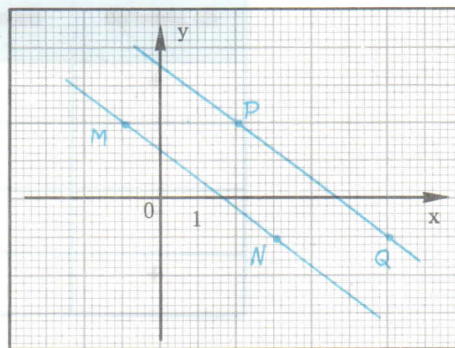
a) Construção:

1) Construa o triângulo cujos vértices são: A (4, −2), B (4, 4) e C (−4, −2)

2) Construa o quadrilátero cujos vértices são: A (−4, 3), B (4, 3), C (6, −2) e D (−6, −2)

b) Determine as coordenadas do ponto de intersecção I das retas:

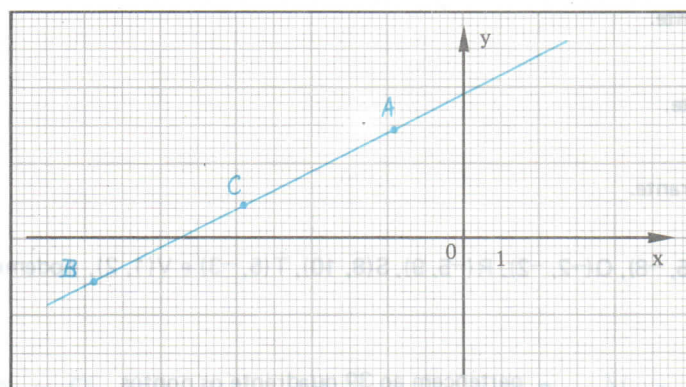
1) **r** passa pelos pontos A (0, 2) e B (3, 0)

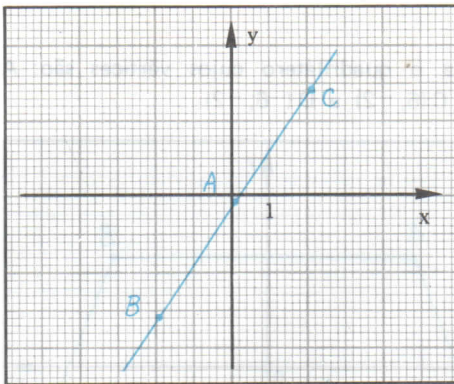
s passa pelos pontos X (0, −2) e Y (3, 0)

Resposta: I (3, 0).

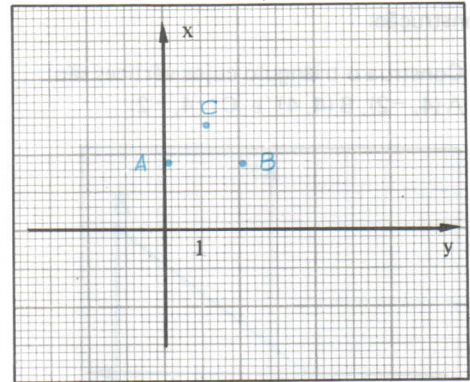
2) **a** passa pelos pontos M (−1, 2) e N (3, −1)

b passa pelos pontos P (2, 2) e Q (6, −1)

Resposta: I (?, ?).

c) Verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares:

1) A (−2, 3), B (−10, −1) e C (−6, 1)

Resposta: São colineares.

2) A (0, 0), B (−2, −3) e C (2, 3)

Resposta: São colineares.

3) A(0, 2), B(2, 2) e C(1, 3)

Resposta: Não são colineares.

d) Analise o quadro:

Sinal da abscissa	Sinal da ordenada	Localização do ponto
+	+	1º quadrante
−	+	2º quadrante
−	−	3º quadrante
+	−	4º quadrante

Agora complete:

1) O ponto A (−2, 3) pertence ao 2º quadrante.

2) O ponto B (4, −1) pertence ao 4º quadrante.

3) O ponto C (5, 3) pertence ao 1º quadrante.

4) O ponto D (−7, −4) pertence ao 3º quadrante.

5) Dados os pontos M(2, −3), N(−2, 1), P(−5, −8), Q(−2, −2), R(−5, 9), S(8, 10), T(5, −3) e V(1, 2), podemos dizer que:

- pertencem ao 1º quadrante os pontos S e V.
- pertencem ao 2º quadrante os pontos N e R.
- pertencem ao 3º quadrante os pontos P e Q.
- pertencem ao 4º quadrante os pontos M e T.

O PRODUTO CARTESIANO, RELAÇÕES E FUNÇÕES

NOÇÃO DE PAR ORDENADO

Consideremos dois números reais quaisquer **a** e **b**. Com base na igualdade de conjuntos, podemos escrever:
$\{a, b\} = \{b, a\}$.

Exemplo: $\{2, 3\} = \{3, 2\}$

Entretanto, algumas aplicações da Matemática exigem que consideremos conjuntos binários em que a ordem dos elementos seja respeitada. A esses conjuntos chamamos **par ordenado**.

Então: par ordenado é um conjunto binário em que os elementos são considerados numa ordem determinada.

Indicação: (a, b) onde **a** é o primeiro elemento e **b** é o segundo elemento.

Exemplo:

(2, 5): par ordenado onde o primeiro elemento é 2, e o segundo é 5.

Agora complete a tabela:

Primeiro elemento	−3	2	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{2}$	0	−2	−3	$-\frac{1}{5}$	1
Segundo elemento	6	−4	$\frac{1}{4}$	7	−1	0	−3	10	$\frac{1}{3}$	−9
Par ordenado	(−3, 6)	(2, −4)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	(4, 7)	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$	(0, 0)	(−2, −3)	(−3, 10)	$\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right)$	(1, −9)

A IGUALDADE DE PARES ORDENADOS

Dois pares ordenados são iguais quando apresentam os mesmos elementos na mesma ordem.

Assim:

$$(a, b) = (m, n) \iff a = m \text{ e } b = n$$

Exemplos:

$(3, 5) = (3, 5)$ $\quad$ $(-1, 4) = (-1, 4)$ $\quad$ $(2, 6) \neq (6, 2)$

Logo:

Se $(2, 3) = (x, y)$, então $x = 2$ e $y = 3$.

Se $(m, 5) = (2, n)$, então $m = 2$ e $n = 5$.

VAMOS EXERCITAR

Determine o termo desconhecido:

1) $(5, y) = (x, 4)$

x = 5

y = 4

2) $\left(x, -\frac{1}{3}\right) = (9, y)$

x = 9

y = $-\frac{1}{3}$

3) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right) = (m, n)$

m = $\frac{1}{2}$

n = $\frac{1}{8}$

4) $(x + 3, 4) = (5, y - 3)$

x = 2

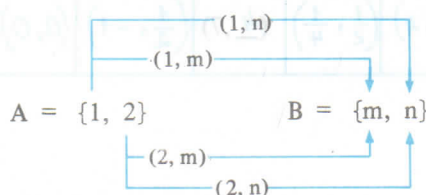
y = 7

O PRODUTO CARTESIANO

Considere dois conjuntos, A e B, não-vazios. Pois bem, o conjunto formado por todos os pares ordenados, tais que em cada um deles o primeiro elemento pertence ao conjunto A, e, o segundo, ao conjunto B, recebe o nome de produto cartesiano de A por B, e é representado por $A \times B$.

Observe:

$A = \{1, 2\}$ $B = \{m, n\}$

(1, n) (1, m) (2, m) (2, n)

Logo: $A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n)\}$

AGORA FAÇA VOCÊ

Conhecendo os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1\}$ e $C = \{m, n\}$, determine:

1) $A \times B = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}$

2) $B \times A = \{(0,1), (0,2), (0,3), (1,1), (1,2), (1,3)\}$

3) $A \times C = \{(1,m), (1,n), (2,m), (2,n), (3,m), (3,n)\}$

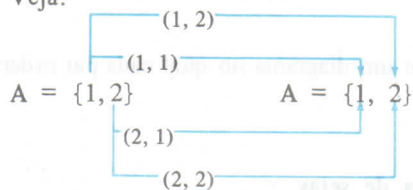
4) $C \times B = \{(m,0), (m,1), (n,0), (n,1)\}$

5) $B \times C = \{(0,m), (0,n), (1,m), (1,n)\}$

6) $C \times A = \{(m,1), (m,2), (m,3), (n,1), (n,2), (n,3)\}$

Podemos determinar o produto cartesiano de um conjunto por ele mesmo.

Veja:

(1, 2)
(1, 1)

A = {1, 2}　　A = {1, 2}　　Logo: A × A = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)}

(2, 1)
(2, 2)

Complete:

1) Se A = {2, 4} então A × A = {(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)}

2) Se B = {a, b} então B × B = {(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)}

3) Se C = {1, 8} então C × C = {(1,1), (1,8), (8,1), (8,8)}

Observações:

1ª) Em geral, A × B ≠ B × A, ou seja, no produto cartesiano não ocorre a propriedade comutativa.

2ª) A × A pode ser indicado por A^2, B × B por B^2, etc.

3ª) Se o conjunto A tem **m** elementos, e B, **n** elementos, então A × B terá **m · n** elementos.

Exemplo: Se A tem 3 elementos, e B, 2 elementos, então A × B terá 3 · 2 = 6 elementos.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine o valor de **x** e **y**:

1) (5, 12) = (x, y)

x = 5

y = 12

2) (3, x) = (y, 7)

x = 7

y = 3

3) (x − 2, 8) = (4, y + 1)

x = 6

y = 7

b) Determine o produto cartesiano:

1) A = {a, b}

B = {5, 6}

A × B = {(a,5), (a,6), (b,5), (b,6)}

B × B = {(5,5), (5,6), (6,5), (6,6)}

B × A = {(5,a), (5,b), (6,a), (6,b)}

2) A = {1, 2, 3}

B = {8, 9}

A × B = {(1,8), (1,9), (2,8), (2,9), (3,8), (3,9)}

B × B = {(8,8), (8,9), (9,8), (9,9)}

B × A = {(8,1), (8,2), (8,3), (9,1), (9,2), (9,3)}

3) A = {0, 3, 5}

B = {x, y}

A × B = {(0,x), (0,y), (3,x), (3,y), (5,x), (5,y)}

A × A = {(0,0), (0,3), (0,5), (3,0), (3,3), (3,5), (5,0), (5,3), (5,5)}

B × B = {(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)}

B × A = {(x,0), (x,3), (x,5), (y,0), (y,3), (y,5)}

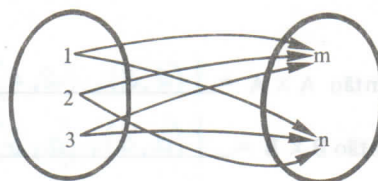
O DIAGRAMA DE SETAS: UMA REPRESENTAÇÃO DO PRODUTO CARTESIANO

O produto cartesiano de dois conjuntos finitos pode ser representado por um diagrama no qual cada par ordenado é indicado por uma seta.

Veja:

Consideremos os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{m, n\}$

Diagrama de setas

Então:

$A \times B = \{(1, m), (1, n), (2, m), (2, n), (3, m), (3, n)\}$

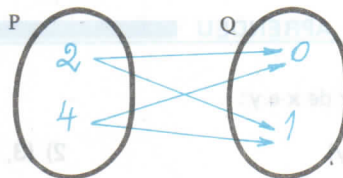
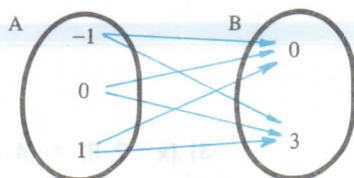
VAMOS EXERCITAR

Represente por diagrama de setas os produtos cartesianos:

1) $A \times B$, sendo:

$A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 3\}$

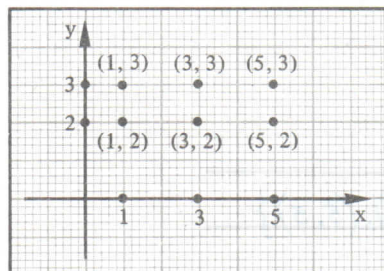
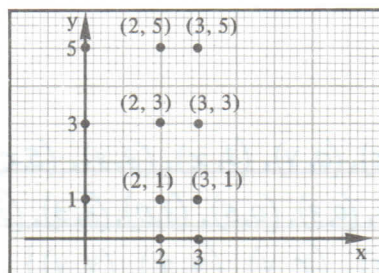
2) $P \times Q$, sendo:

$P = \{2, 4\}$ e $Q = \{0, 1\}$

A UTILIZAÇÃO DO PLANO CARTESIANO

Para representar, no plano cartesiano, o produto cartesiano de dois conjuntos, é preciso indicar graficamente todos os pares ordenados pertencentes ao referido produto. Para isso, indica-se no eixo das abscissas os elementos do primeiro conjunto do produto e no eixo das ordenadas os elementos do segundo conjunto desse produto.

Exemplo:

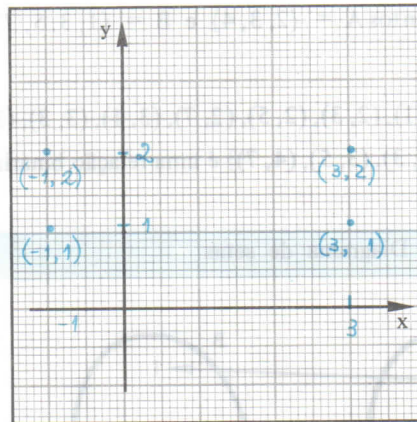
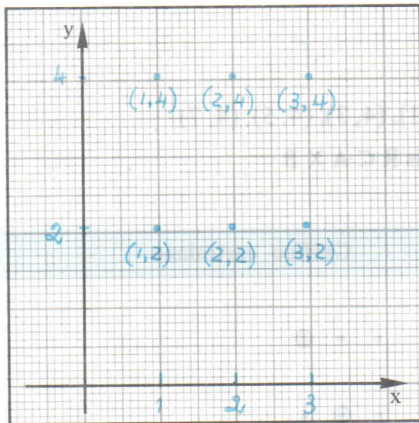
Represente, no plano cartesiano, os produtos:

1) $A \times B$, sendo $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3\}$.

2) $B \times A$, sendo $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 3\}$.

Note que cada ponto representa um par ordenado do produto cartesiano.

AGORA FAÇA VOCÊ

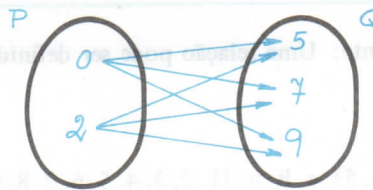
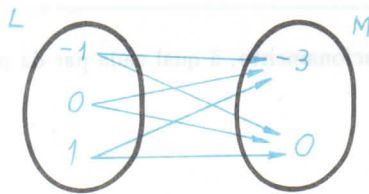
Represente, no plano cartesiano, os produtos:

1) $A \times B$, sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 4\}$.

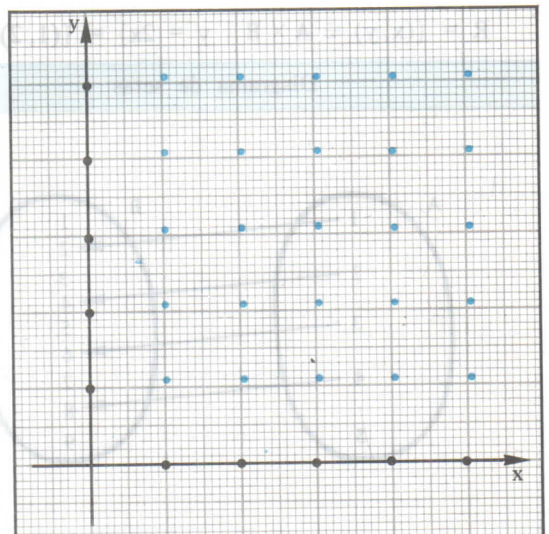
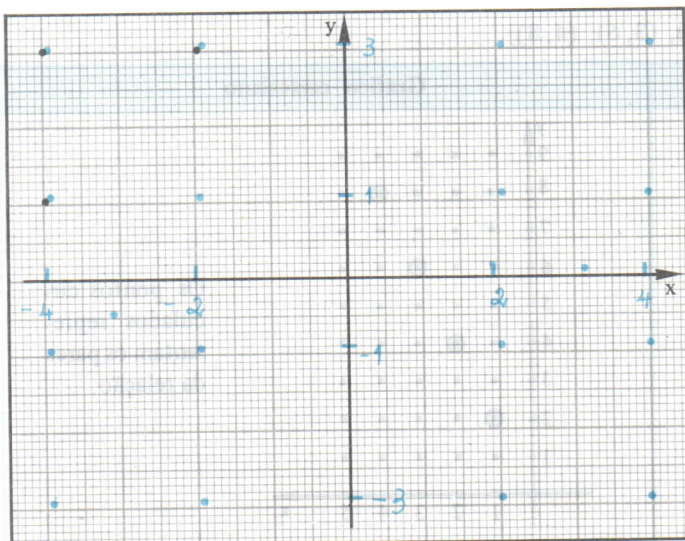
2) $B \times A$, sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{-1, 3\}$.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Faça um diagrama de setas para os produtos cartesianos.

1) $L \times M$, sendo $L = \{-1, 0, 1\}$ e $M = \{-3, 0\}$.

2) $P \times Q$, sendo $P = \{0, 2\}$ e $Q = \{5, 7, 9\}$.

b) Represente, no plano cartesiano, os produtos:

1) $M \times L$, sendo $L = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $M = \{-4, -2, 2, 4\}$.

2) $A \times A$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

A RELAÇÃO BINÁRIA

Relação binária de um conjunto A em um conjunto B é todo subconjunto de $A \times B$.

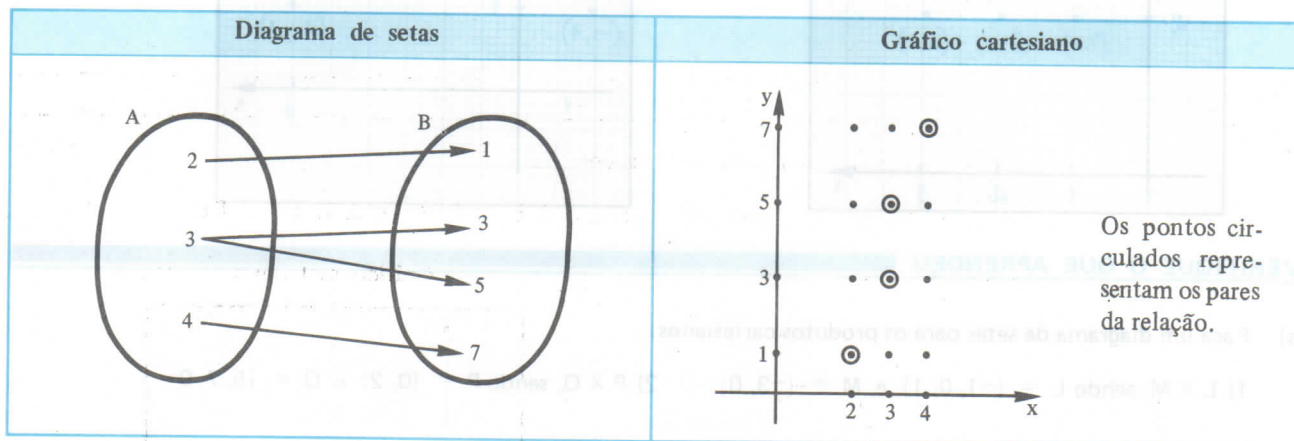
Exemplo:

Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 3, 5, 7\}$

Então:

$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (3, 7), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$

$R = \{(2, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ é uma relação binária de A em B, pois $R \subset A \times B$

Veja:

Agora note o seguinte: Uma relação pode ser definida por uma **lei de relacionamento**, à qual cada par da relação deve obedecer.

Exemplo:

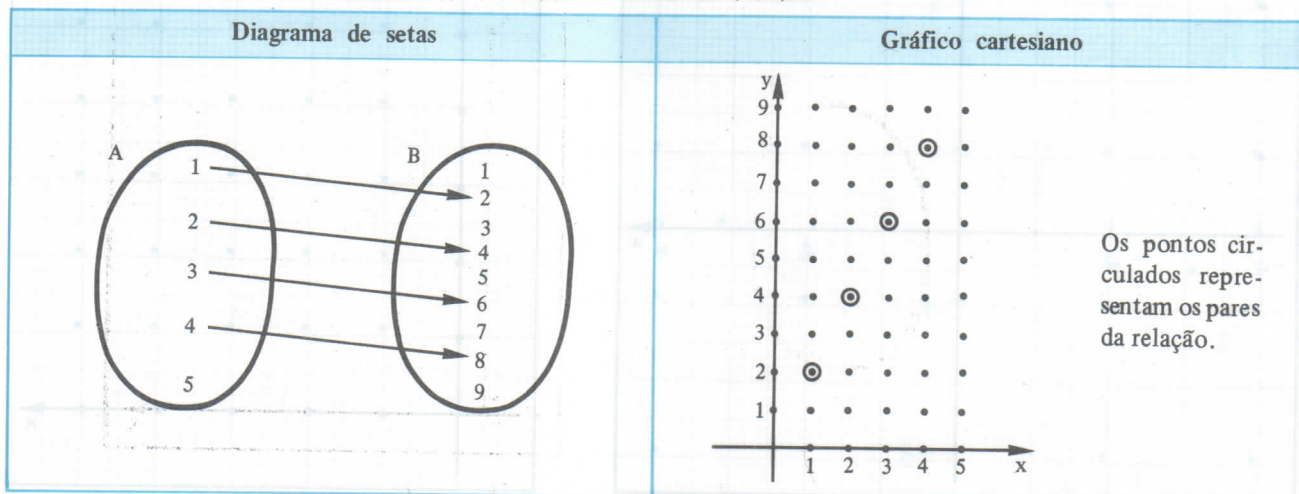
Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

A relação R é traduzida assim:

Pares ordenados (x, y) do produto $A \times B$, sendo **x** um elemento de A, **y** um elemento de B e, em cada par, o valor de **y** é o dobro do valor de **x**.

Então temos:

$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$

VAMOS EXERCITAR

a) Passe para a linguagem comum as seguintes relações, dadas em linguagem matemática:

1) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$

Linguagem comum: pares ordenados do produto $A \times B$, sendo x um elemento de A, y um elemento de B, e, em cada par, o valor de y é igual ao de x.

2) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$

Linguagem comum: pares ordenados do produto $A \times B$, sendo x um elemento de A, y um elemento de B, e, em cada par, o valor de y é menor que o de x.

3) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

Linguagem comum: pares ordenados do produto $A \times B$, sendo x um elemento de A, y um elemento de B, e, em cada par, o valor de y é o quadrado do valor de x.

b) Construa o diagrama de setas e o gráfico cartesiano das relações:

1) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 2\}$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Diagrama de setas

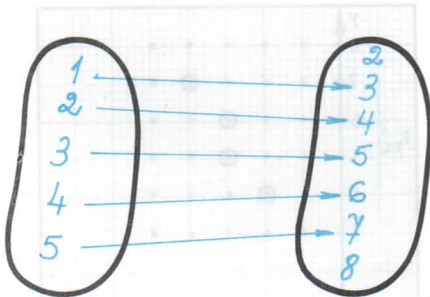
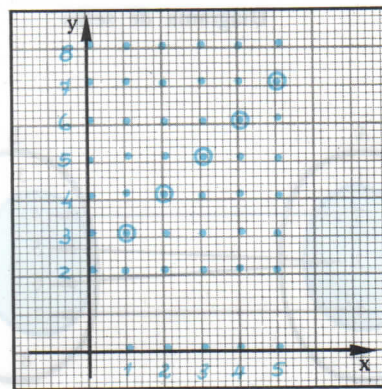



Gráfico cartesiano

Logo: $R = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7)\}$.

2) $R = \{(x, y) \in A \times B \mid y < x\}$, sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Diagrama de setas

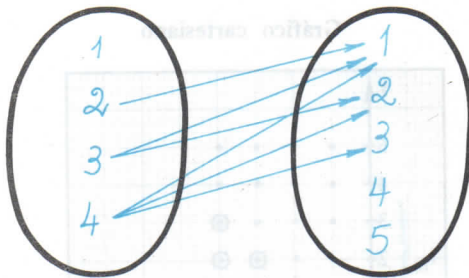
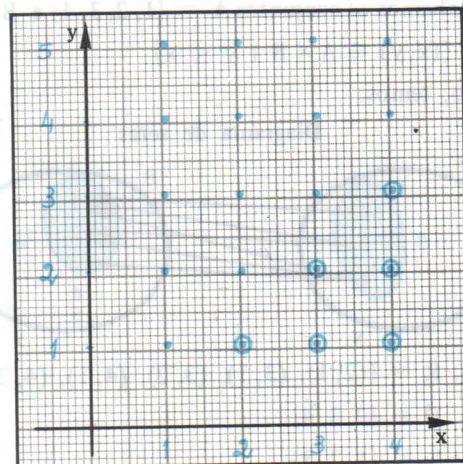



Gráfico cartesiano

Logo, $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$.

O DOMÍNIO E A IMAGEM

Consideremos os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5} e B = {3, 4, 5, 6, 7, 8} e a seguinte relação em A × B:

R = {(2, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7)}

Pois bem, o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par da relação R recebe o nome de **domínio** da relação, sendo indicado pela letra **D**.

Então: D = {2, 3, 4}

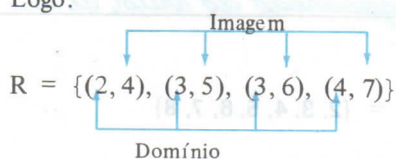
O conjunto formado pelos segundos elementos de cada par da relação R recebe o nome de **imagem** ou **conjunto imagem** da relação, sendo indicado por $\mathbf{I_m}$.

Então:

I_m = {4, 5, 6, 7}

Logo:

Imagem

R = {(2, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 7)}

Domínio

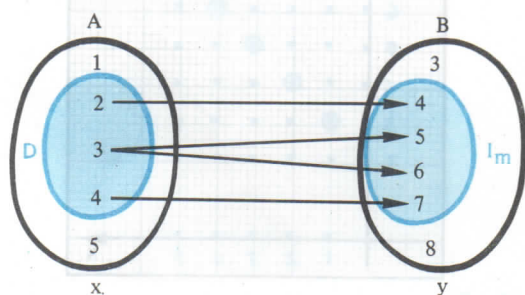
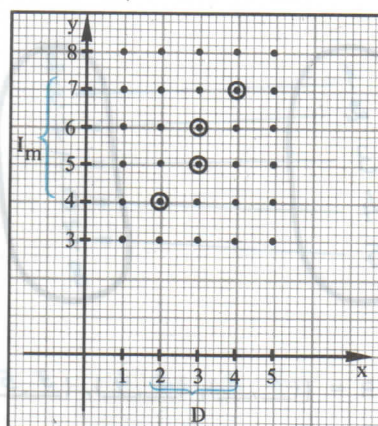



Diagrama de setas

Gráfico cartesiano

O conjunto B recebe o nome de **contradomínio (CD)**.

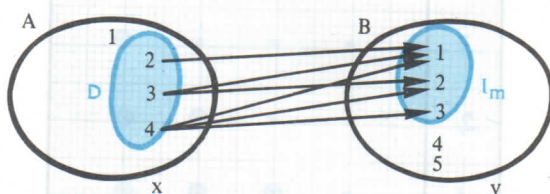
Vamos analisar outro exemplo.

Suponhamos os conjuntos A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5} e a seguinte relação em A × B:

R = {(x, y) ∈ A × B | y < x}

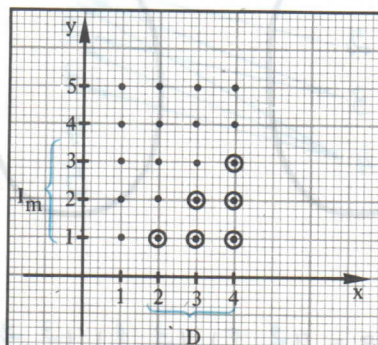
Então, temos:

Diagrama de setas

Gráfico cartesiano

Logo: R = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

D = {2, 3, 4}

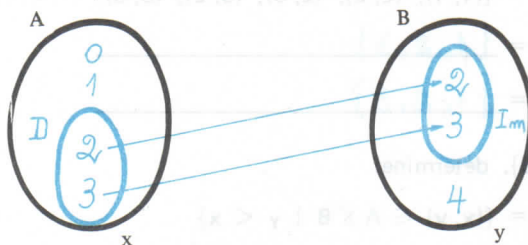
I_m = {1, 2, 3}

CD = {1, 2, 3, 4, 5}

VAMOS EXERCITAR

Construa o diagrama de setas e o gráfico cartesiano da relação em A × B, destacando o domínio e a imagem dessa relação:

1) R = {(x, y) ∈ A × B | y = x}, sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {2, 3, 4}

Diagrama de setas

Gráfico cartesiano

Logo: R = {(2, 2), (3, 3)}

D = {2, 3}

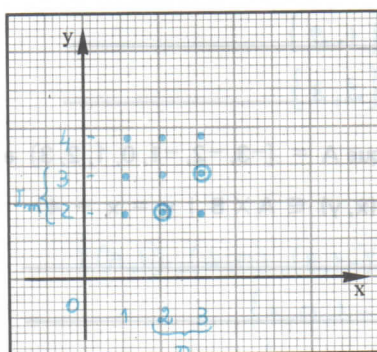
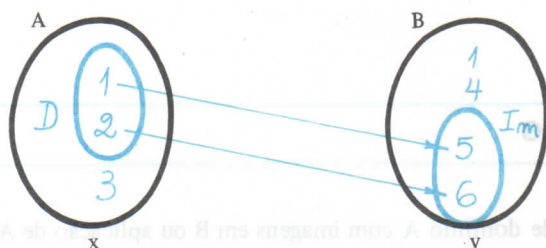
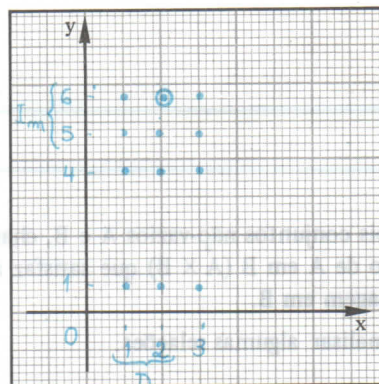
I_m = {2, 3}

2) R = {(x, y) ∈ A × B | y = x + 4}, sendo A = {1, 2, 3} e B = {1, 4, 5, 6}

Diagrama de setas

Gráfico cartesiano

Logo: R = {(1, 5), (2, 6)}

D = {1, 2}

I_m = {5, 6}

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dados os conjuntos A = {−2, −1, 0, 1, 2} e B = {1, 2, 4, 6, 8}, determine:

1) R = {(x, y) ∈ A × B | y = x}

R = {(1, 1), (2, 2)}

D = {1, 2}

I_m = {1, 2}

2) R = {(x, y) ∈ A × B | y = x^2}

R = {(−2, 4), (−1, 1), (1, 1), (2, 4)}

D = {−2, −1, 1, 2}

I_m = {1, 4}

3) R = {(x, y) ∈ A × B | y = 2x}

R = {(1, 2), (2, 4)}

D = {1, 2}

I_m = {2, 4}

4) R = {(x, y) ∈ A × B | y = −x}

R = {(−2, 2), (−1, 1)}

D = {−2, −1}

I_m = {1, 2}

b) Dadas as relações, indique o domínio e a imagem:

1) R = {(1, 5), (1, 6), (2, 3), (4, 6)}

D = {1, 2, 4}

I_m = {3, 5, 6}

2) R = {(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)}

D = {1, 2}

I_m = {2, 3}

3) R = {(1, 2), (1, 3), (2, 3)}

D = {1, 2}

I_m = {2, 3}

4) R = {(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)}

D = {1, 2, 3}

I_m = {1, 2, 3}

c) Sabendo que A = {−3, −2, −1, 0, 1, 2, 3} e B = {0, 3, 4, 5}, determine:

1) R = {(x, y) ∈ A × B | y = x + 4}

R = {(−1, 3), (0, 4), (1, 5)}

D = {−1, 0, 1}

I_m = {3, 4, 5}

2) R = {(x, y) ∈ A × B | y < x}

R = {(1, 0), (2, 0), (3, 0)}

D = {1, 2, 3}

I_m = {0}

d) Sendo A = {1, 2, 3, 4}, determine:

R = {(x, y) ∈ A × A | y ⩾ 3} = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)}

FUNÇÃO

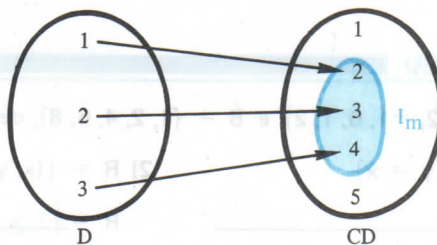
Dados dois conjuntos não-vazios A e B, chama-se função de domínio A com imagens em B ou aplicação de A em B a toda relação de A em B (A × B) que satisfaz à seguinte condição: **Cada elemento pertencente ao conjunto A possui uma única imagem em B.**

Vamos analisar algumas relações.

1ª) A = {1, 2, 3}

B = {1, 2, 3, 4, 5}

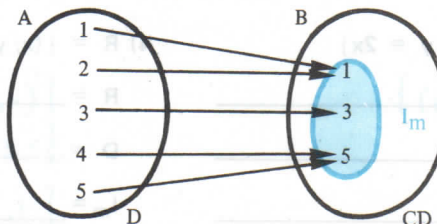
R = {(1, 2), (2, 3), (3, 4)}

Diagrama de setas

Note que a cada elemento de A corresponde uma única imagem em B. Então R é uma função.

2ª) A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {1, 3, 5}

R = {(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 5), (5, 5)}

Diagrama de setas

Note que a cada elemento de A corresponde uma única imagem em B. Então R é uma função.
Não importa que um mesmo elemento de B seja imagem de mais de um elemento de A.

3ª) A = {1, 2, 3, 4}

B = {1, 3, 5}

R = {(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)}

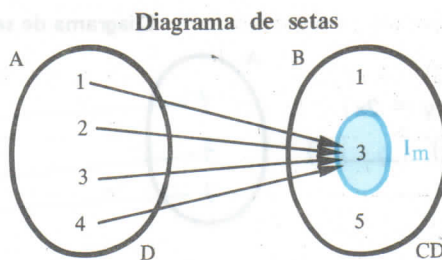



Diagrama de setas

Note que a cada elemento de A corresponde uma única imagem em B. Então R é uma função.

Não importa que um único elemento de B seja imagem de todos os elementos de A.

4ª) A = {1, 2, 3}

B = {1, 2, 3, 4, 5}

R = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5)}

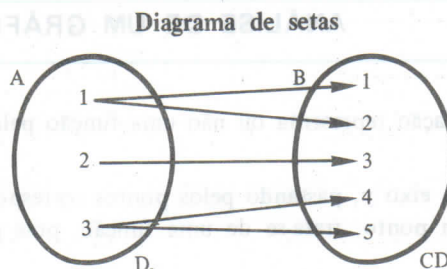



Diagrama de setas

Note que existe elemento de A com mais de uma imagem em B. Então R não é função.

5ª) A = {1, 2, 3, 4}

B = {1, 3, 5, 7, 9}

R = {(1, 3), (2, 5), (4, 7)}

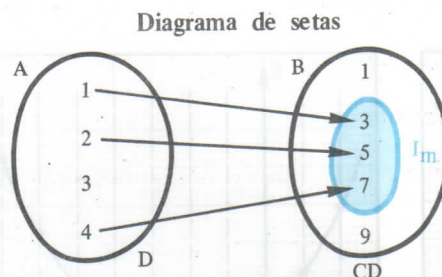



Diagrama de setas

Note que existe elemento de A que não possui imagem em B. Então R não é função.

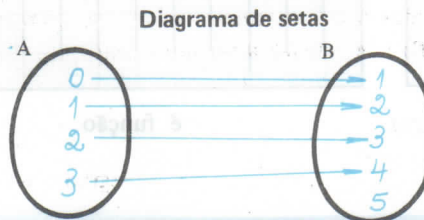
VAMOS EXERCITAR

Faça o diagrama de setas das relações e indique se é ou não função:

1) A = {0, 1, 2, 3}

B = {1, 2, 3, 4, 5}

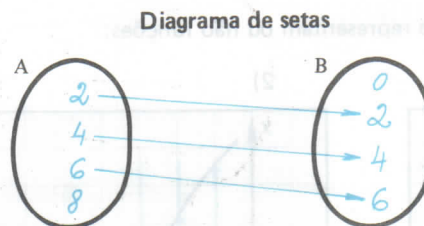
R = {(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)}

Diagrama de setas

Justificativa: Cada elemento de A possui uma única imagem em B. Então R é função.

2) A = {2, 4, 6, 8}

B = {0, 2, 4, 6}

R = {(2, 2), (4, 4), (6, 6)}

Diagrama de setas

Justificativa: Existe elemento de A que não possui imagem em B. Então R não é função.

3) A = {1, 2, 3, 4}

B = {2, 5, 7, 10}

R = {(1, 2), (2, 5), (3, 7), (3, 10)}

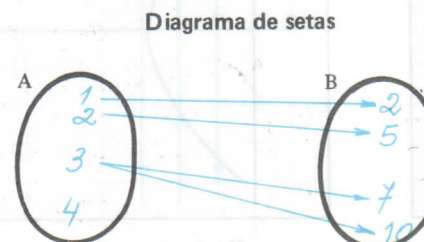



Diagrama de setas

Justificativa: Existe elemento de A com mais de uma imagem em B e existe elemento de A que não possui imagem em B. Então R não é função.

4) $A = \{1, 3, 4\}$

$B = \{1, 2, 5, 6, 8\}$

$R = \{(x, y) \in A \times B \mid y = 2x\}$

$R = \{(1, 2), (3, 6), (4, 8)\}$

Diagrama de setas

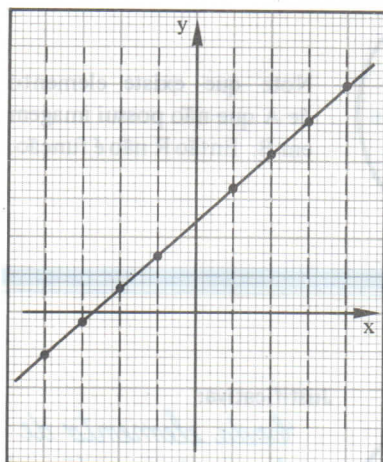
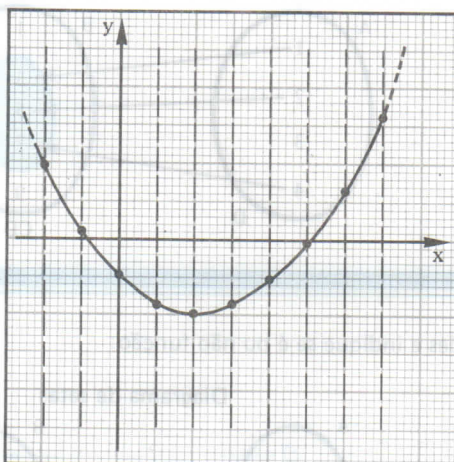
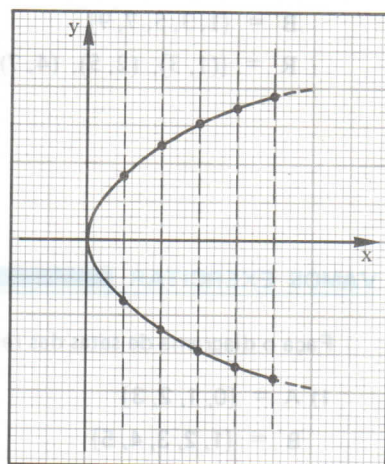
Justificativa:

Cada elemento de A possui uma única imagem em B. Então R é função.

ANÁLISE DE UM GRÁFICO

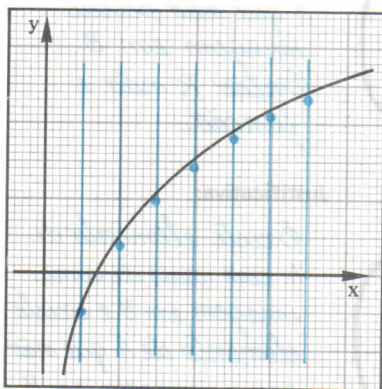
Pode-se verificar se uma relação representa ou não uma função pela análise do seu gráfico cartesiano. Para isso, faz-se o seguinte:

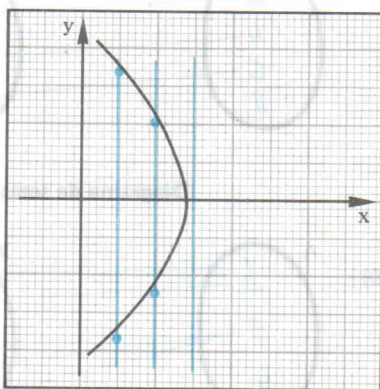
Traçam-se retas paralelas ao eixo y, passando pelos pontos correspondentes ao domínio da relação. Se cada reta cortar o gráfico em apenas um ponto, trata-se de uma função, pois para cada x do conjunto A tem-se somente uma imagem y do conjunto B.

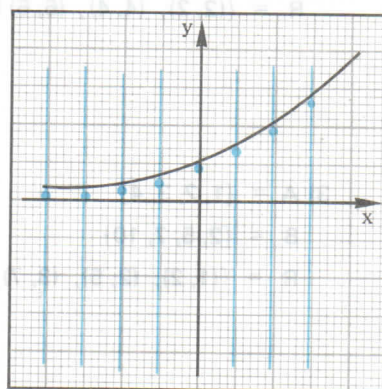
Observe:

é função

é função

não é função

AGORA FAÇA VOCÊ

Dados os gráficos, verifique se representam ou não funções:

1)

Resposta: *É função.*

2)

Resposta: *Não é função.*

3)

Resposta: *É função.*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Dadas as relações, verifique se são ou não funções de A = {5, 6} em B = {1, 3, 5}:

1) R_1 = {(5, 1), (6, 1)}
Resposta: É função.

2) R_2 = {(5, 1), (5, 3), (6, 1)}
Resposta: Não é função.

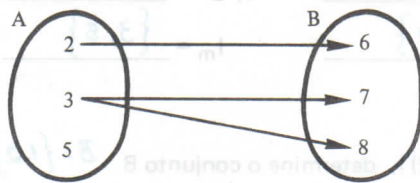
3) R_3 = {(5, 1), (5, 3), (5, 5)}
Resposta: Não é função.

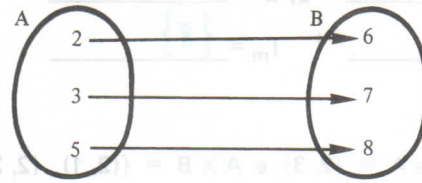
4) R_4 = {(5, 1), (5, 3), (6, 5)}
Resposta: Não é função.

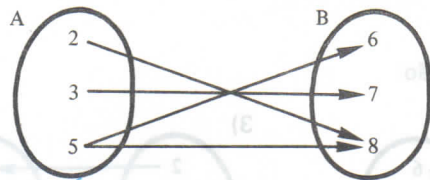
5) R_5 = {(5, 3), (6, 3)}
Resposta: É função.

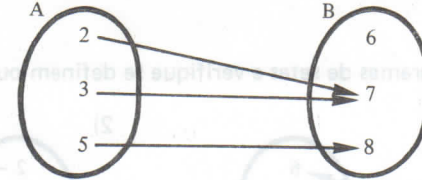
6) R_6 = {(5, 5), (6, 1), (6, 3)}
Resposta: Não é função.

b) Dados os diagramas, escreva a relação e verifique se ela define ou não uma função:

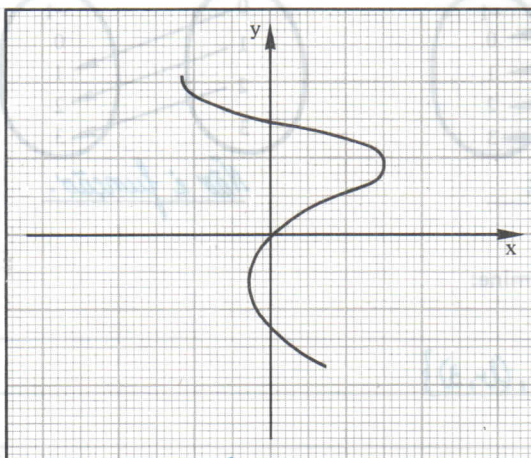
1)

R = {(2,6), (3,7), (3,8)}
Não é função.

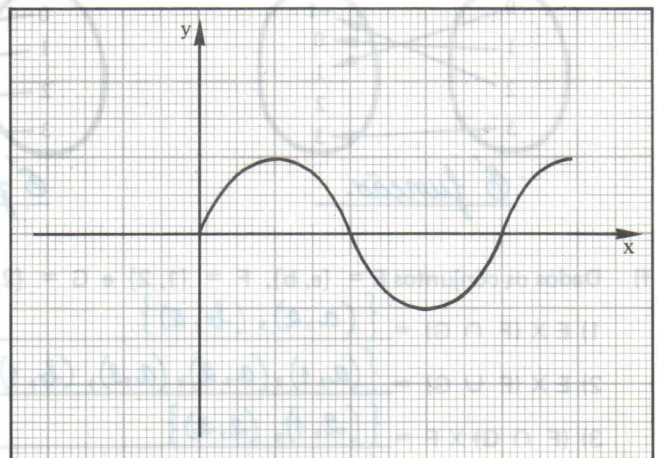
2)

R = {(2,6), (3,7), (5,8)}
É função.

3)

R = {(2,8), (3,7), (5,6), (5,8)}
Não é função.

4)

R = {(2,7), (3,7), (5,8)}
É função.

c) Dados os gráficos, verifique se eles representam ou não funções:

1)

Resposta: Não é função.

2)

Resposta: É função.

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Dados os conjuntos A = {a, b}, B = {m, n} e C = {0, 4}, determine:

1) A X A = {(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)}

2) A X B = {(a,m), (a,n), (b,m), (b,n)}

3) A X C = {(a,0), (a,4), (b,0), (b,4)}

4) B X B = {(m,m), (m,n), (n,m), (n,n)}

b) Sabendo que A = {1, 2, 3, 4} e B = {3, 5, 8, 9}, escreva os pares ordenados das seguintes relações em A X B:

1) R = {(x, y) ∈ A X B | y = x} = {(3,3)}

2) R = {(x, y) ∈ A X B | y = 2x} = {(4,8)}

3) R = {(x, y) ∈ A X B | y = 3x} = {(1,3), (3,9)}

4) R = {(x, y) ∈ A X B | y = x + 2} = {(1,3), (3,5)}

c) Escreva os conjuntos domínio e imagem para cada relação do exercício anterior:

1) D = {3} I_m = {3}

2) D = {4} I_m = {8}

3) D = {1, 3} I_m = {3, 9}

4) D = {1, 3} I_m = {3, 5}

d) Resolva:

1) Sabendo que A = {2, 3} e A X B = {(2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)}, determine o conjunto B. B = {1,2}

2) Num produto cartesiano, os pares ordenados (3x − y, 1) e (7, 2x + 3y) são iguais. Calcule o valor de **x** e o de **y**. (2 e −1)

3) Determine a relação R = {(x, y) ∈ A X B | y = 2x − 3}, sabendo que A = {1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5} R = {(2,1), (3,3), (4,5)}

e) Analise os diagramas de setas e verifique se definem ou não uma função:

1)

Não é função.

2)

Não é função.

3)

É função.

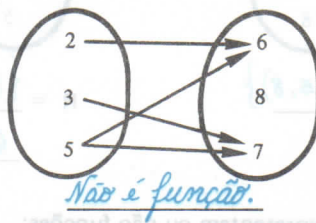
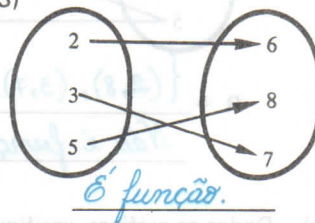
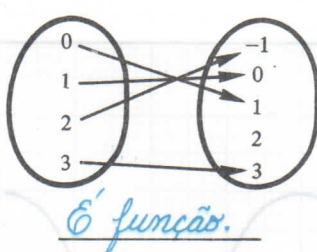
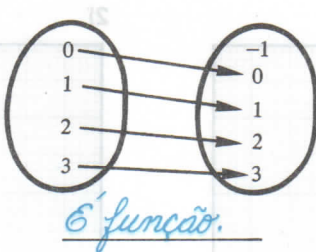
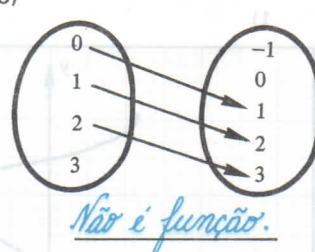
4)

É função.

5)

É função.

6)

Não é função.

f) Dados os conjuntos E = {a, b}, F = {1, 2} e G = {2, 3}, determine:

1) E X (F ∩ G) = {(a,2), (b,2)}

2) E X (F ∪ G) = {(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)}

3) (F ∩ G) X F = {(2,1), (2,2)}

4) (F ∪ G) X G = {(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)}

A FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

NOÇÃO DE FUNÇÃO LINEAR E DE FUNÇÃO AFIM

Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **linear** quando se define por uma equação do primeiro grau com duas variáveis, do tipo $y = ax$, sendo $a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo:

$f(x) = 3x$ (lê-se: efe de **x** é igual a três **x**)

ou

$f : x \rightarrow 3x$ (lê-se: efe leva **x** em três **x**)

ou

$y = 3x$

Uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de **afim** quando se define por uma equação do primeiro grau com duas variáveis, do tipo $y = ax + b$, sendo $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Exemplo:

$f(x) = 2x + 3$ (lê-se: efe de **x** é igual a dois **x** mais três)

ou

$f : x \rightarrow 2x + 3$ (lê-se: efe leva **x** em dois **x** mais três)

ou

$y = 2x + 3$

VAMOS EXERCITAR

a) Dê a leitura e classifique as funções em lineares ou afins:

1) $f(x) = -4x$

Leitura: efe de x é igual a menos quatro x

Função: linear

2) $f : x = -x + 2$

Leitura: efe leva x em menos x mais dois

Função: afim

3) $f(x) = 2x - 5$

Leitura: efe de x é igual a dois x menos cinco

Função: afim

4) $f : x \rightarrow 6x$

Leitura: efe leva x em seis x

Função: linear

b) Coloque **L** se a função for linear e **A** se for afim:

1) $f(x) = -x + 4$	(A)	2) $y = 4x - 3$	(A)	3) $f(x) = 5x$	(L)
4) $y = -x$	(L)	5) $f : x \rightarrow x - 3$	(A)	6) $y = 2x + 7$	(A)
7) $f : x \rightarrow 4x$	(L)	8) $y = -5x + 1$	(A)	9) $f(x) = 8x$	(L)
10) $f : x \rightarrow x - 1$	(A)				

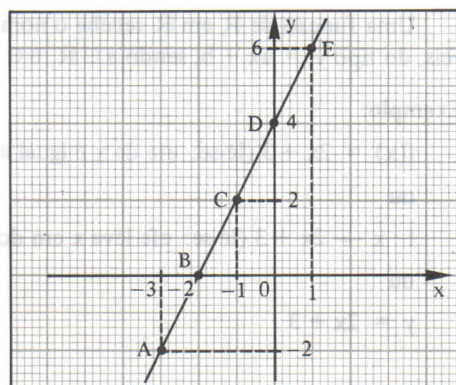
As funções linear e afim constituem as **funções do primeiro grau.**

COMO OBTER O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

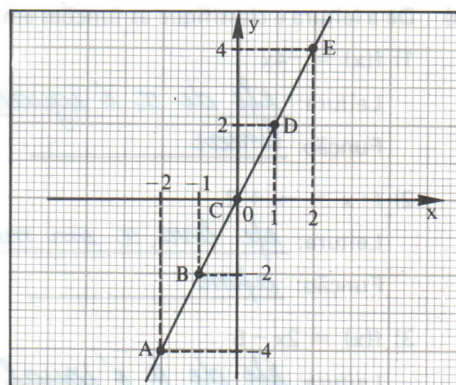
O gráfico de uma função do primeiro grau é uma reta que se obtém, no plano cartesiano, através da localização de pontos cujas abscissas são valores arbitrários atribuídos à variável **x** e cujas ordenadas são determinadas por meio da equação que define a função.

Observe os exemplos:

1.º) Construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = 2x + 4$:

x (arbitrário)	**y = 2x + 4**	**y**	**Ponto**
−3	$y = 2(-3) + 4 = -6 + 4$	−2	A(−3, −2)
−2	$y = 2(-2) + 4 = -4 + 4$	0	B(−2, 0)
−1	$y = 2(-1) + 4 = -2 + 4$	2	C(−1, 2)
0	$y = 2(0) + 4 = 0 + 4$	4	D(0, 4)
1	$y = 2(1) + 4 = 2 + 4$	6	E(1, 6)

A reta é o gráfico da função afim $f : x \rightarrow 2x + 4$.

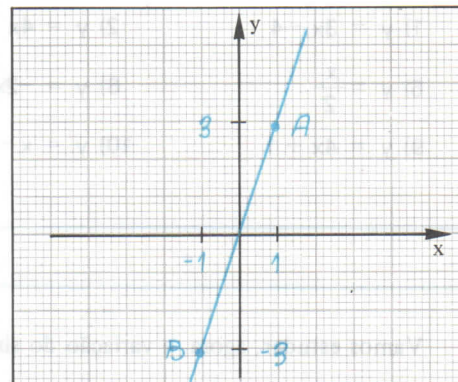
2.º) Construir o gráfico da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $y = 2x$:

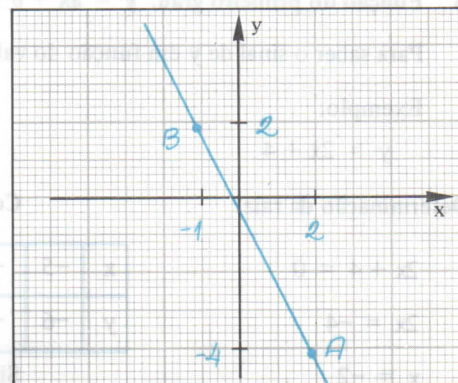
x (arbitrário)	**y = 2x**	**y**	**Ponto**
−2	$y = 2(-2) = -4$	−4	A(−2, −4)
−1	$y = 2(-1) = -2$	−2	B(−1, −2)
0	$y = 2(0) = 0$	0	C(0, 0)
1	$y = 2(1) = 2$	2	D(1, 2)
2	$y = 2(2) = 4$	4	E(2, 4)

A reta é o gráfico da função linear $f : x \rightarrow 2x$.

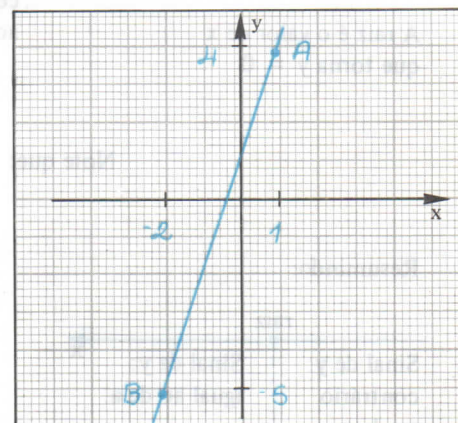
Você já aprendeu que uma reta fica determinada apenas por dois pontos distintos. Então, para construir o gráfico de uma função do primeiro grau, é suficiente representar apenas dois de seus pontos e traçar a reta que passa por esses pontos.

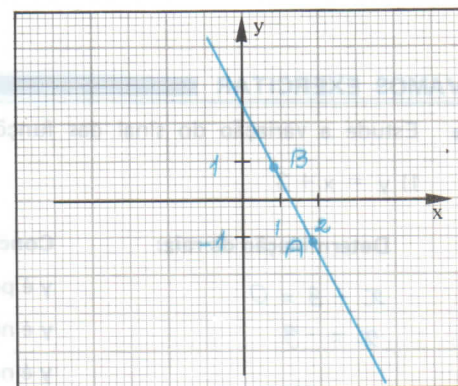
- Construa o gráfico das funções do primeiro grau definidas pelas equações:

1) $y = 3x$

x	y = 3x	y	Ponto
1	y = 3(1) = 3	3	A(1 , 3)
−1	y = 3(−1) = −3	−3	B(−1 , −3)

2) $y = -2x$

x	y = −2x	y	Ponto
2	y = −2(2) = −4	−4	A(2, −4)
−1	y = −2(−1) = 2	2	B(−1 , 2)

3) $y = 3x + 1$

x	y = 3x + 1	y	Ponto
1	y = 3(1) + 1 = 3 + 1	4	A(1 , 4)
−2	y = 3(−2) + 1 = −6 + 1	−5	B(−2 , −5)

4) $y = -2x + 3$

x	y = −2x + 3	y	Ponto
2	y = −2(2) + 3 = −4 + 3	−1	A(2 , −1)
1	y = −2(1) + 3 = −2 + 3	1	B(1 , 1)

- Utilizando papel milimetrado, construa os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por:

1) $y = 3x - 4$ 2) $y = 4x$ 3) $y = -x$ 4) $y = -3x + 4$

5) $y = \frac{x}{2}$ 6) $y = -2x - 8$ 7) $y = -6x + 8$ 8) $y = -4x - 3$

9) $y = 4x + 1$ 10) $y = x - 1$ 11) $y = -2x$ 12) $y = x - 3$

VARIAÇÃO DO SINAL

Vamos estudar, agora, a variação do sinal de y em função da variação do valor da variável x.

- **Função do primeiro grau:** $y = ax + b$

Para saber o sinal de y em função do valor de x é preciso, em primeiro lugar, determinar a raiz.

Exemplo:

$y = 2x + 4$

Determinação da raiz:

$2x + 4 = 0$

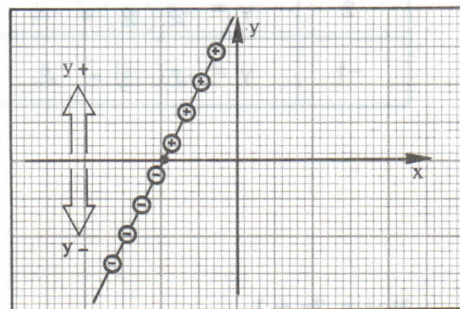
$2x = -4$

$x = -2$

A raiz é o valor de x que torna $y = 0$

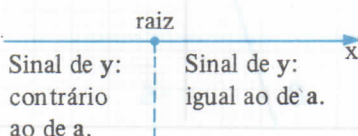
Construção do gráfico:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1
y	−6	−4	−2	0	2	4	6

Sinal de y: contrário ao de a | Sinal de y: igual ao de a

Note que:
- y é positivo para $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$
- y é nulo para $x = -2$
- y é negativo para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

Resumindo:

raiz — x

Sinal de y: contrário ao de a. | Sinal de y: igual ao de a.

VAMOS EXERCITAR

- Estude a variação do sinal das funções:

1) $y = x + 3$

Determinação da raiz:

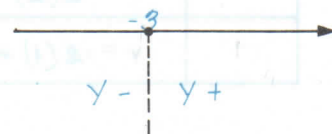
$x + 3 = 0$

$x = -3$

Conclusão:

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

y é nulo para: $x = -3$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$

2) $y = -2x + 8$

Determinação da raiz:

$-2x + 8 = 0$

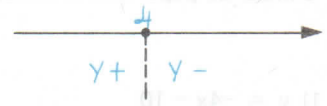
$-2x = -8$

$x = 4$

Conclusão:

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

y é nulo para: $x = 4$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

3) $y = 4x - 2$

Determinação da raiz:

$4x - 2 = 0$

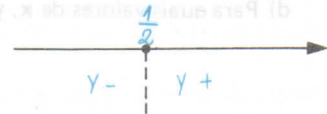
$4x = 2$

$x = \frac{1}{2}$

Conclusão:

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\}$

y é nulo para: $x = \frac{1}{2}$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$

4) $y = -5x$

Determinação da raiz:

$-5x = 0$

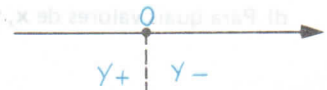
$5x = 0$

$x = 0$

Conclusão:

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

y é nulo para: $x = 0$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

- Complete adequadamente, conforme a função:

1) $y = 5x + 5$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

y é nulo para: $x = -1$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

2) $y = -3x + 9$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

y é nulo para: $x = 3$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

3) $y = -2x + 10$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

y é nulo para: $x = 5$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

4) $y = 3x - 7$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{7}{3}\}$

y é nulo para: $x = \frac{7}{3}$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{3}\}$

5) $y = -x$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

y é nulo para: $x = 0$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

6) $y = -\frac{1}{2}x + 8$

y é positivo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 16\}$

y é nulo para: $x = 16$

y é negativo para: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 16\}$

- Utilizando papel milimetrado, construa o gráfico das funções e, a seguir, responda o que se pede:

1) $y = -4x - 10$

a) Qual é a raiz? $\left(-\frac{5}{2}\right)$

b) Para quais valores de **x**, **y** é positivo? $\left(x < -\frac{5}{2}\right)$

c) Para quais valores de **x**, **y** é negativo? $\left(x > -\frac{5}{2}\right)$

d) Para quais valores de **x**, **y** é nulo? $\left(-\frac{5}{2}\right)$

2) $y = 3x - 5$

a) Qual é a raiz? $\left(\frac{5}{3}\right)$

b) Para quais valores de **x**, **y** é positivo? $\left(x > \frac{5}{3}\right)$

c) Para quais valores de **x**, **y** é negativo? $\left(x < \frac{5}{3}\right)$

d) Para quais valores de **x**, **y** é nulo? $\left(\frac{5}{3}\right)$

3) $y = 5x + 10$

a) Qual é a raiz? (2)

b) Para quais valores de **x**, **y** é positivo? $(x < 2)$

c) Para quais valores de **x**, **y** é negativo? $(x > 2)$

d) Para quais valores de **x**, **y** é nulo? (2)

4) $y = x - 9$

a) Qual é a raiz? (9)

b) Para quais valores de **x**, **y** é positivo? $(x > 9)$

c) Para quais valores de **x**, **y** é negativo? $(x < 9)$

d) Para quais valores de **x**, **y** é nulo? (9)

5) $y = 2x + 6$

a) Qual é a raiz? (-3)

b) Para quais valores de **x**, **y** é positivo? $(x > -3)$

c) Para quais valores de **x**, **y** é negativo? $(x < -3)$

d) Para quais valores de **x**, **y** é nulo? (-3)

- De acordo com a função, complete o quadro:

1) $y = 7x - 21$

Valor de **x** que torna y igual a zero	
Valores de **x** que tornam y positivo	
Valores de **x** que tornam y negativo	

2) $y = -5x - 20$

Raiz	
Valores de **x** para os quais o sinal de **y** é contrário ao de a	
Valores de **x** para os quais o sinal de **y** é igual ao de a	

3) $y = \frac{3}{4}x - 12$

Valores de x		4	8		20		40
Valores de y	−27			0		6	

4) $y = -\frac{2}{3}x + 4$

Valores de x	0			6	9		
Valores de y		$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$			−4	$-\frac{14}{3}$

5) $y = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$

Valores de x	−10		0		5		$\frac{13}{4}$
Valores de y		$\frac{22}{5}$		0		$-\frac{38}{5}$	

6) $y = -x - \frac{3}{4}$

Valores de x	−2		−1	$-\frac{3}{4}$		1	$\frac{5}{4}$
Valores de y		$\frac{3}{4}$			$-\frac{3}{4}$		

SISTEMAS: RESOLUÇÃO GRÁFICA

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES

Para encontrar graficamente a solução de um sistema de duas equações simultâneas do primeiro grau com duas variáveis, você deve seguir os passos:

1.º passo	2.º passo	3.º passo
Construir o gráfico correspondente à primeira equação.	Construir o gráfico correspondente à segunda equação.	A solução do sistema é dada pelas coordenadas do ponto de intersecção das duas retas.
Os gráficos devem ser construídos no mesmo plano cartesiano, e, como você já sabe, cada gráfico é uma reta.		

Observe o exemplo:

- Resolver graficamente o sistema

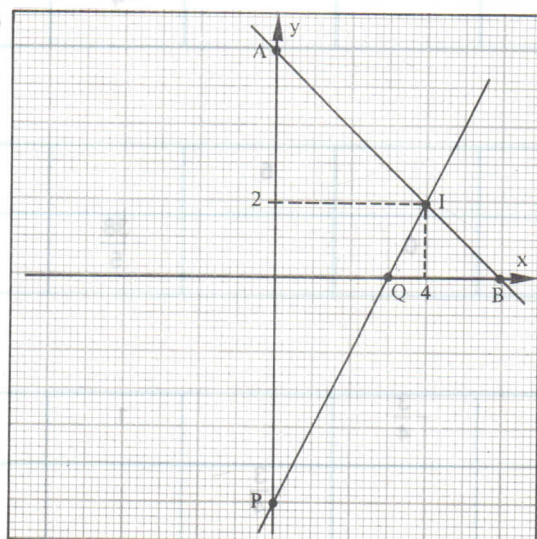
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Primeira equação: $x + y = 6$

x	y	Ponto
0	6	A(0, 6)
6	0	B(6, 0)

Segunda equação: $2x - y = 6$

x	y	Ponto
0	−6	P(0, −6)
3	0	Q(3, 0)

Gráfico

As coordenadas do ponto de intersecção I(4, 2) constituem a solução do sistema.

Então: $V = \{(4, 2)\}$

- Resolva graficamente os sistemas:

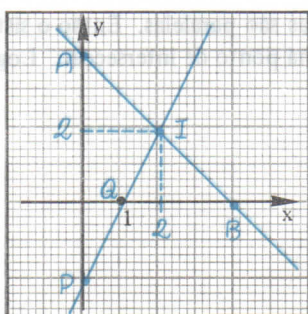
1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	4	A(0, 4)
4	0	B(4, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	-2	P(0, -2)
1	0	Q(1, 0)

Gráfico

Então: V = {(2, 2)}

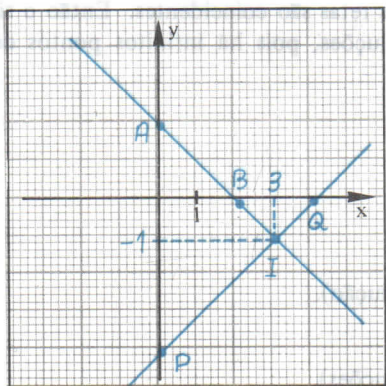
2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 4 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	2	A(0, 2)
2	0	B(2, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	-4	P(0, -4)
4	0	Q(4, 0)

Gráfico

Então: V = {(3, -1)}

Observe agora este exemplo:

- Resolver graficamente os sistemas:

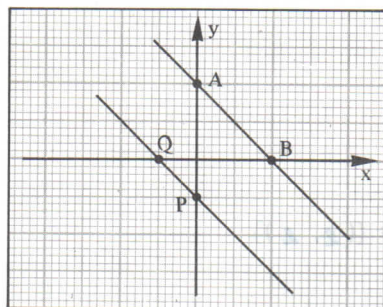
1.º) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = -1 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	2	A(0, 2)
2	0	B(2, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	−1	P(0, −1)
−1	0	Q(−1, 0)

Gráfico

Note que as retas são paralelas. Então o sistema não tem solução, pois não há ponto de intersecção. Logo: $V = \emptyset$

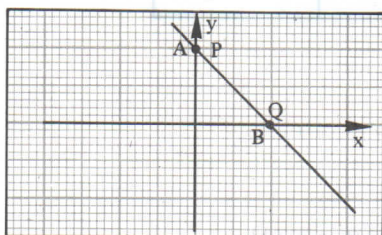
2.º) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	2	A(0, 2)
2	0	B(2, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	2	P(0, 2)
2	0	Q(2, 0)

Gráfico

Note que as retas são coincidentes. Então o sistema admite infinitas soluções, pois há infinitos pontos de intersecção.

Conclusão:

- Retas **concorrentes**: o sistema é **determinado** (admite uma única solução).
- Retas **paralelas**: o sistema é **impossível** (não tem solução).
- Retas **coincidentes**: o sistema é **indeterminado** (admite infinitas soluções).

- Resolva graficamente cada sistema e indique se é determinado, impossível ou indeterminado:

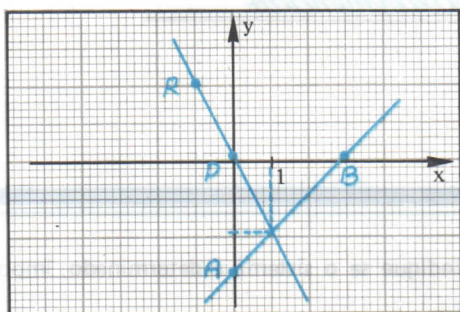
1) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	-3	A(0, -3)
3	0	B(3, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	0	P(0, 0)
0	0	Q(0, 0)
−1	2	R(−1, 2)

Gráfico

Sistema *determinado*

V = {(1, -2)}

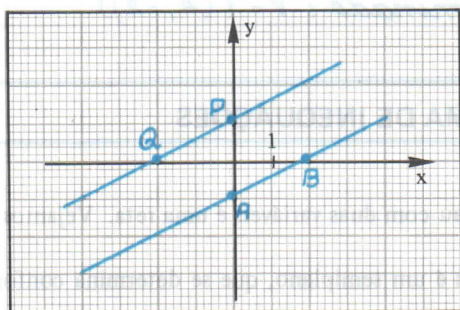
2) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x - 6y = -6 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	-1	A(0, -1)
2	0	B(2, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	1	P(0, 1)
-2	0	Q(-2, 0)

Gráfico

Sistema *impossível*

V = ∅

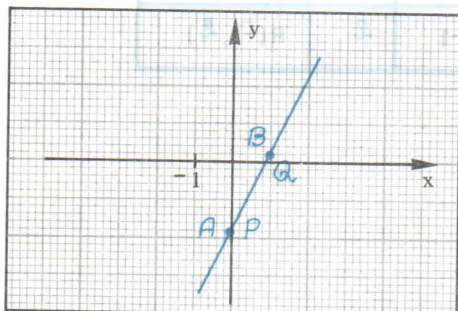
3) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \end{cases}$

Primeira equação

x	y	Ponto
0	-2	A(0, -2)
1	0	B(1, 0)

Segunda equação

x	y	Ponto
0	-2	P(0, -2)
1	0	Q(1, 0)

Gráfico

Sistema *indeterminado*

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

- Utilizando papel milimetrado, resolva graficamente os sistemas. Indique se o sistema é determinado, impossível ou indeterminado:

1) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$

determinado: V = {(1, 2)}

2) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

determinado: V = {(3, 2)}

3) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ 6x - 2y = -6 \end{cases}$

impossível: V = ∅

4) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$

indeterminado

5) $\begin{cases} 5x + 10y = 10 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

indeterminado

6) $\begin{cases} 2x - y = 10 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

determinado: V = {(4, -2)}

RESOLUÇÃO GRÁFICA DE UM SISTEMA DE INEQUAÇÕES

Conforme você estudou, o gráfico de uma equação do primeiro grau com duas variáveis é uma reta. Vejamos agora qual é o gráfico de uma inequação do primeiro grau com duas variáveis.

O gráfico de uma inequação do primeiro grau com duas variáveis é um semiplano, que se determina conforme o seguinte procedimento:

Procedimento	
1.º passo	**2.º passo**
Substitui-se o sinal de desigualdade pelo sinal de igualdade e constrói-se o gráfico da equação obtida, o qual é uma reta.	Utiliza-se um ponto auxiliar para verificar qual dos dois semiplanos determinados pela reta é o gráfico da inequação. Por comodidade, este ponto auxiliar deve ser, se possível, a origem: (0, 0).

Observe os exemplos:

- Construir o gráfico da inequação:

1.º) $x + y < 3$

Primeiro passo

$x + y = 3$

x	y	Ponto
0	3	A(0, 3)
3	0	B(3, 0)

Segundo passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

$x = 0$

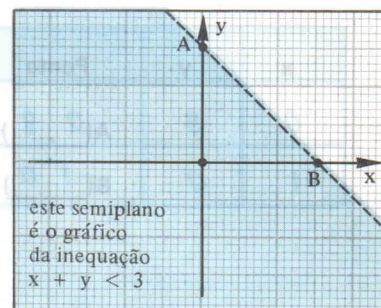
$y = 0$

$x + y < 3$

$0 + 0 < 3$

$0 < 3$ (V)

Logo,a origem pertence ao gráfico da inequação.

Gráfico

Observação:

Os pontos pertencentes à reta traçada não pertencem ao gráfico da inequação; daí ela estar tracejada.

2.º) $2x - y \geqslant 2$

Primeiro passo

$2x - y = 2$

x	y	Ponto
0	−2	A(0, −2)
1	0	B(1, 0)

Segundo passo

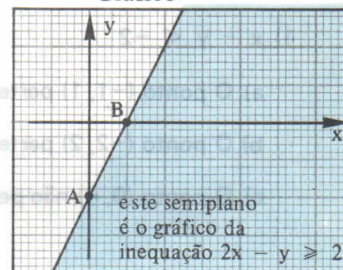
Ponto auxiliar: O (0, 0)

$2x - y \geqslant 2$

$2 \cdot 0 - 0 \geqslant 2$

$0 \geqslant 2$ (F)

Logo, a origem não pertence ao gráfico da inequação.

Gráfico

VAMOS EXERCITAR

- Construa o gráfico das inequações:

1) $2x - 4y < 4$

Primeiro passo

$2x - 4y = 4$

x	y	Ponto
0	-1	A(0, -1)
2	0	B(2, 0)

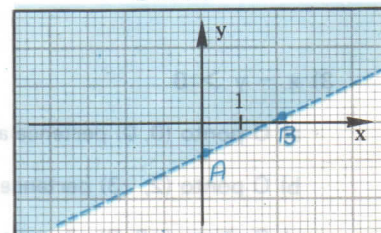
Segundo passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

$2x - 4y < 4$

$2.0 - 4.0 < 4$

$0 < 4$ (V)

Gráfico

2) $2x + 3y \geqslant -6$

Primeiro passo

$2x + 3y = -6$

x	y	Ponto
0	-2	A(0, -2)
-3	0	B(-3, 0)

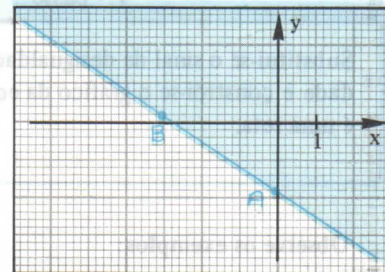
Segundo passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

$2x + 3y \geqslant -6$

$2 . 0 + 3 . 0 \geqslant -6$

$0 \geqslant -6$ (V)

Gráfico

3) $-3x + y \geqslant 3$

Primeiro passo

$-3x + y = 3$

x	y	Ponto
0	3	A(0, 3)
-1	0	B(-1, 0)

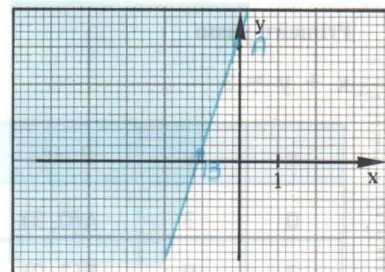
Segundo passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

$-3x + y \geqslant 3$

$3 . 0 + 0 \geqslant 3$

$0 \geqslant 3$ (F)

Gráfico

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Utilizando papel milimetrado, construa o gráfico das inequações e, a seguir, coloque **V**, se a sentença for verdadeira, ou **F**, se for falsa.

1) $x - y < -2$

a) O ponto (−1, 1) pertence ao gráfico da inequação. (F)

b) O ponto (−2, 2) pertence ao gráfico da inequação. (V)

c) O ponto (0, 4) não pertence ao gráfico da inequação. (F)

2) $4x - 5y \geqslant 20$

a) O ponto (1, 2) não pertence ao gráfico da inequação. (V)

b) O ponto (4, −3) não pertence ao gráfico da inequação. (F)

c) O ponto (6, 5) pertence ao gráfico da inequação. (F)

3) $x - y > 0$

a) O ponto (0, 0) pertence ao gráfico da inequação. (F)

b) O ponto (2, −3) pertence ao gráfico da inequação. (V)

c) O ponto (−3, 2) não pertence ao gráfico da inequação. (V)

Agora você está em condições de resolver graficamente um sistema de inequações do primeiro grau com duas variáveis.

Procedimento

Constrói-se no mesmo plano cartesiano o gráfico de cada inequação. A solução do sistema é dada pelo conjunto intersecção dos dois semiplanos.

Observe o exemplo:

- Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x + y > 4 \\ -x + 2y > 2 \end{cases}$$

Primeira inequação

1º passo

$x + y = 4$

x	y	ponto
0	4	A(0, 4)
4	0	B(4, 0)

2º passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

$x + y > 4$

$0 + 0 > 4$

$0 > 4$ (F)

Segunda inequação

1º passo

$-x + 2y = 2$

x	y	ponto
0	1	P(0, 1)
−2	0	Q(−2, 0)

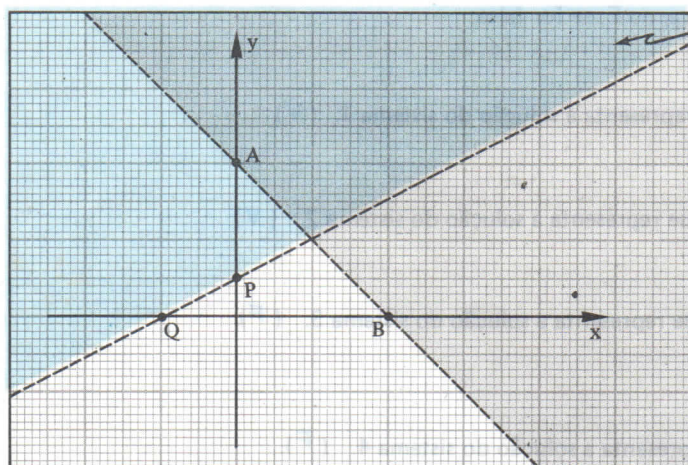
2º passo

Ponto auxiliar: O (0, 0)

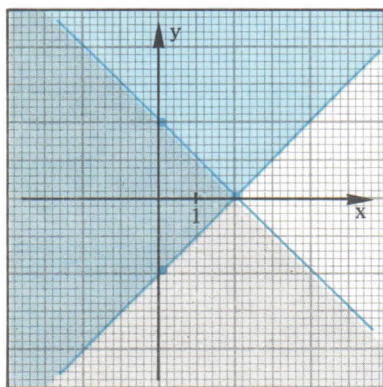
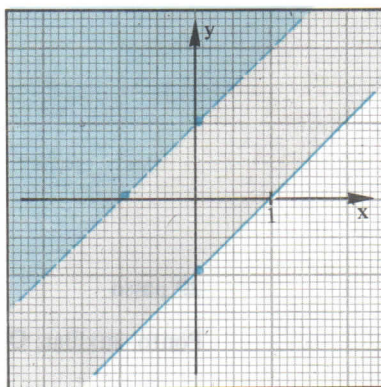
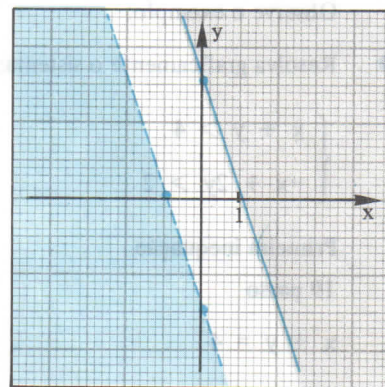
$-x + 2y > 2$

$-0 + 2 \cdot 0 > 2$

$0 > 2$ (F)

Gráfico

VAMOS EXERCITAR

Resolva graficamente os sistemas:

1) $\begin{cases} x + y \leqslant 2 \\ x - y \leqslant -2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y < -1 \\ x - y \leqslant 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y \geqslant 3 \\ 3x + y < -3 \end{cases}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine no plano cartesiano a região que representa graficamente a solução dos sistemas (utilize papel milimetrado):

1) $\begin{cases} 2x - y > 2 \\ 3x + 4y \leqslant 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 5y < 15 \\ 2x - 5y \leqslant 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y > 2 \\ x - y \geqslant -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x - y < 6 \\ x - 6y < -6 \end{cases}$

b) Agora coloque V, se a sentença for verdadeira, ou F, se for falsa:

1) O ponto C(3, −1) pertence à região que representa a solução do sistema 1. (V)

2) O ponto D(3, 2) não pertence à região que representa a solução do sistema 2. (V)

3) O ponto E(2, 2) não pertence à região que representa a solução do sistema 3. (F)

4) O ponto F(2, 1) pertence à região que representa a solução do sistema 4. (F)

a) Encontre graficamente a solução dos sistemas:

1) $\begin{cases} x - \dfrac{y}{3} = -1 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$ $V = \{(1, 6)\}$

2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - y = -1 \\ \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{6} + 2 \end{cases}$ $V = \{(3, 3)\}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x}{2} + y = 8 \\ \dfrac{5x}{2} - \dfrac{3y}{2} = 7 \end{cases}$ $V = \{(4, 2)\}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ indeterminado

5) $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 6x + 4y = 24 \end{cases}$ impossível

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - y = 1 \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{3y}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$ impossível

b) Construa o gráfico das inequações:

1) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{y}{2} \leqslant 1$

2) $2(x + 3) - 3(x - y) > 0$

3) $2(x - 2y) - 3(x - 1) > 4$

4) $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{y+1}{4}$

5) $\dfrac{2x - 1}{2} - y \geqslant 1$

6) $\dfrac{x - 3}{4} - y > 1$

c) Determine graficamente a solução dos sistemas:

1) $\begin{cases} 5x + 3y < 15 \\ 4x - 3y \leqslant 12 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y < 2 \\ x + y > 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y < 6 \\ 2x - y \leqslant -2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - 2y > -4 \\ x + y \geqslant 5 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - y < -2 \\ x + \dfrac{3y}{2} < 6 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} < 2 \\ \dfrac{4x}{5} - y > 4 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + y - 6 < 0 \\ x + 2y - 4 \geqslant 0 \end{cases}$

d) Dê as coordenadas de um ponto X que pertença à região que representa graficamente a solução de cada um dos sistemas da questão anterior:

1) X(___,___) 2) X(___,___) 3) X(___,___) 4) X(___,___)

5) X(___,___) 6) X(___,___) 7) X(___,___) 8) X(___,___)

e) Testes

1) O gráfico de uma função do primeiro grau é:

a. ( ) uma hipérbole
b. ( ) uma parábola
c. (X) uma reta
d. ( ) um plano

2) O gráfico de uma inequação do primeiro grau com duas variáveis é:

a. ( ) uma hipérbole
b. ( ) uma parábola
c. ( ) um plano
d. (X) um semi-plano

3) Um sistema **determinado** é aquele que:

a. (X) admite uma única solução
b. ( ) admite infinitas soluções
c. ( ) admite duas soluções
d. ( ) não admite solução

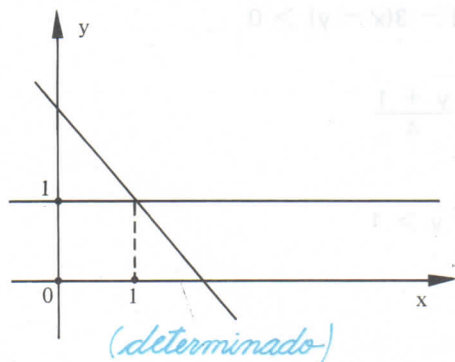
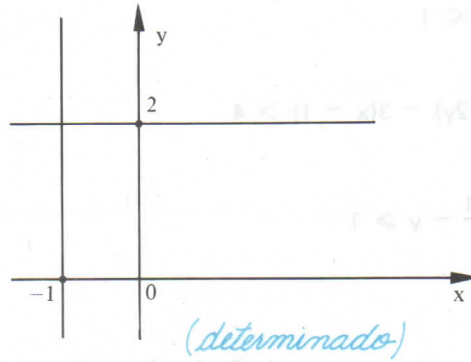
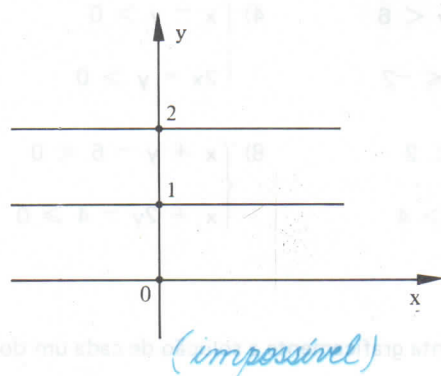
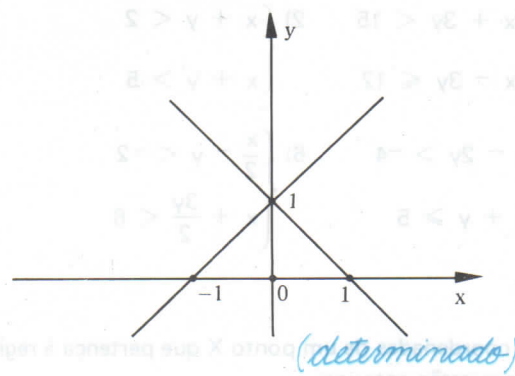
4) Um sistema **indeterminado** é aquele que:

a. ( ) admite uma única solução
b. (X) admite infinitas soluções
c. ( ) admite duas soluções
d. ( ) não admite solução

5) Um sistema **impossível** é aquele que:

a. ( ) admite uma única solução
b. ( ) admite infinitas soluções
c. ( ) admite duas soluções
d. (X) não admite solução

f) Dados os gráficos, indique se o sistema correspondente é **determinado**, **impossível** ou **indeterminado**.

1)

2)

3)

4)

g) Indique a solução de cada sistema da questão anterior:

1) I (1 , 1)
2) I (−1 , 2)
3) I (,)
4) I (0 , 1)

FEIXE DE PARALELAS

RAZÃO E PROPORÇÃO: UMA REVISÃO

Você já sabe o que é uma razão e uma proporção.

Vamos recordar!

Razão de dois números é o quociente indicado destes dois números.

Exemplo:

A razão dos números 4 e 15 é 4 : 15 ou $\frac{4}{15}$

VAMOS EXERCITAR

Estabeleça a razão entre os números:

1) 2 e 3. Razão: $\frac{2}{3}$ ou $2:3$

2) 3 e 0,5. Razão: $\frac{3}{0,5}$ ou $3:0,5$

3) 0,6 e 0,2. Razão: $\frac{0,6}{0,2}$ ou $0,6:0,2$

4) 5 e $\sqrt{2}$. Razão: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ou $5:\sqrt{2}$

5) $\sqrt{3}$ e 7. Razão: $\frac{\sqrt{3}}{7}$ ou $\sqrt{3}:7$

6) $\sqrt{5}$ e $\sqrt{11}$. Razão: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$ ou $\sqrt{5}:\sqrt{11}$

7) $\sqrt{8}$ e 0,3. Razão: $\frac{\sqrt{8}}{0,3}$ ou $\sqrt{8}:0,3$

8) $3\sqrt{2}$ e $2\sqrt{5}$. Razão: $\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$ ou $3\sqrt{2}:2\sqrt{5}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Reduza aos menores números inteiros os termos das razões:

1) $3\frac{1}{2} : 2 = \frac{7}{4}$

2) $\frac{3}{5} : \frac{7}{10} = \frac{6}{7}$

3) $0,222\ldots : 0,555\ldots = \frac{2}{5}$

4) $0,6 : 0,\overline{3} = \frac{9}{5}$

5) $1,2 : 0,8 = \frac{3}{2}$

6) $\left(\frac{2}{3} \text{ de } 9\right) : \left(\frac{1}{4} \text{ de } 20\right) = \frac{6}{5}$

7) $\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{15}{6}\right) : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$

8) $\left(\frac{1}{4} \text{ de } 12\right) : \left(\frac{1}{3} \text{ de } 6\right) = \frac{3}{2}$

PROPORÇÃO: SENTENÇA

Exemplo:

Os números 2, 4, 8 e 16 estabelecem nesta ordem uma proporção.

Veja:

$\frac{2}{4}$ equivale a $\frac{1}{2}$

$\frac{8}{16}$ equivale a $\frac{1}{2}$

Então: $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$ ou $2 : 4 = 8 : 16$

meios (4 e 8); extremos (2 e 16)

Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$2 : 4 = 8 : 16$

$4 \cdot 8 = 32$

$2 \cdot 16 = 32$

ou $\dfrac{2}{4} = \dfrac{8}{16}$

$4 \cdot 8 = 32$

$2 \cdot 16 = 32$

EXERCÍCIOS

a) Complete conforme o modelo:

$\dfrac{3}{5} \overset{?}{=} \dfrac{15}{25} \Longrightarrow 3 \cdot 25 \overset{?}{=} 5 \cdot 15$

$75 = 75$ (V)

Logo: é uma proporção.

1) $\dfrac{7}{12} \overset{?}{=} \dfrac{21}{36} \Longrightarrow 7 \cdot 36 \overset{?}{=} 12 \cdot 21$

$252 = 252$ (V)

Logo: *é uma proporção.*

2) $\dfrac{0,4}{1,3} \overset{?}{=} \dfrac{2}{6,5} \Longrightarrow 0,4 \cdot 6,5 \overset{?}{=} 1,3 \cdot 2$

$2,6 = 2,6$ (V)

Logo: *é uma proporção.*

3) $\dfrac{0,7}{1,5} \overset{?}{=} \dfrac{2,8}{7} \Longrightarrow 0,7 \cdot 7 \overset{?}{=} 1,5 \cdot 2,8$

$4,9 = 4,2$ (F)

Logo: *não é uma proporção.*

b) Estabeleça uma proporção com os números:

1) 3, 42, 14 e 9:

$\dfrac{3}{14} = \dfrac{9}{42}$

2) 15, 6, 2 e 45:

$\dfrac{15}{2} = \dfrac{45}{6}$

3) 8, 85, 17 e 40:

$\dfrac{8}{17} = \dfrac{40}{85}$

4) 0,2; 20; 5 e 0,8:

$\dfrac{0,2}{5} = \dfrac{0,8}{20}$

5) 1; 6; 1,2 e 5:

$\dfrac{1}{1,2} = \dfrac{5}{6}$

6) $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$:

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{8}}{2\sqrt{5}}$

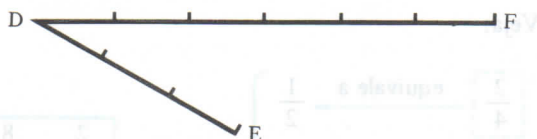
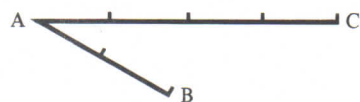
DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Que numeral você deve escrever no ☐ para completar a proporção?

1) $\dfrac{0,222\ldots}{3} = \dfrac{1,111\ldots}{\boxed{15}}$

2) $\dfrac{0,555\ldots}{\boxed{0,4}} = \dfrac{2,777\ldots}{2}$

SEGMENTOS PROPORCIONAIS

Observe as figuras:

Note que: $m(\overline{AB}) = 2$ cm; $m(\overline{AC}) = 4$ cm; $m(\overline{DE}) = 3$ cm e $m(\overline{DF}) = 6$ cm.

Perceba que os números correspondentes às medidas destes segmentos formam uma proporção:

$\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ → $4 \cdot 3 = 12$; $2 \cdot 6 = 12$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ → $3 \cdot 4 = 12$; $2 \cdot 6 = 12$	$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ → $3 \cdot 4 = 12$; $6 \cdot 2 = 12$	$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ → $2 \cdot 6 = 12$; $3 \cdot 4 = 12$
ou	ou	ou	ou
$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AC})} = \frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{DF})}$	$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{DF})}$	$\frac{m(\overline{DF})}{m(\overline{DE})} = \frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AB})}$	$\frac{m(\overline{DE})}{m(\overline{AB})} = \frac{m(\overline{DF})}{m(\overline{AC})}$
Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ são proporcionais nesta ordem.	Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ são proporcionais nesta ordem.	Dizemos que os segmentos $\overline{DF}$, $\overline{DE}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são proporcionais nesta ordem.	Dizemos que os segmentos $\overline{DE}$, $\overline{AB}$, $\overline{DF}$ e $\overline{AC}$ são proporcionais nesta ordem.

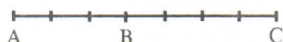
Logo: Quatro segmentos são proporcionais numa certa ordem quando as medidas, na mesma unidade, são expressas por números que formam uma proporção, nessa mesma ordem.

Por comodidade, de agora em diante usaremos a seguinte notação simplificada:

$m(\overline{AB})$ será indicado por AB; então: $m(\overline{AB}) = AB$.
$m(\overline{CD})$ será indicado por CD; então: $m(\overline{CD}) = CD$.

VAMOS EXERCITAR

a) Determine as razões, conforme a figura:

1)

$\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$

$\frac{BC}{AC} = \frac{4}{7}$

2)

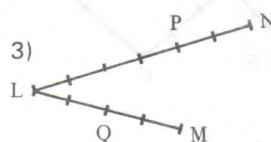
$\frac{PR}{RS} = \frac{5}{3}$

$\frac{QR}{PS} = \frac{3}{8}$

$\frac{QR}{RS} = \frac{1}{1}$

$\frac{QS}{PQ} = \frac{3}{1}$

$\frac{PQ}{QR} = \frac{2}{3}$

3)

$\frac{LQ}{QM} = \frac{1}{1}$

$\frac{QM}{PN} = \frac{1}{1}$

$\frac{LP}{LQ} = \frac{2}{1}$

$\frac{PN}{LP} = \frac{1}{2}$

$\frac{LM}{LP} = \frac{1}{1}$

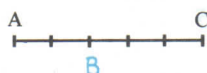
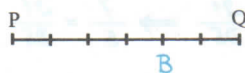
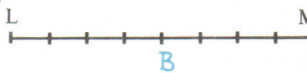
b) Localize na figura o ponto B, de modo que:

1) A ——— C (B)

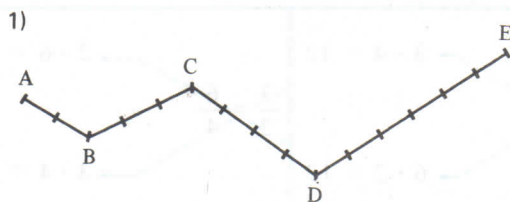
$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$

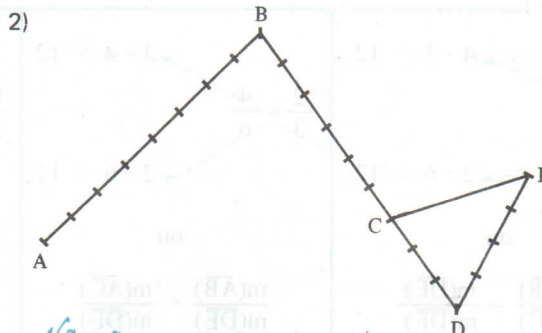
2) P ——— Q (B)

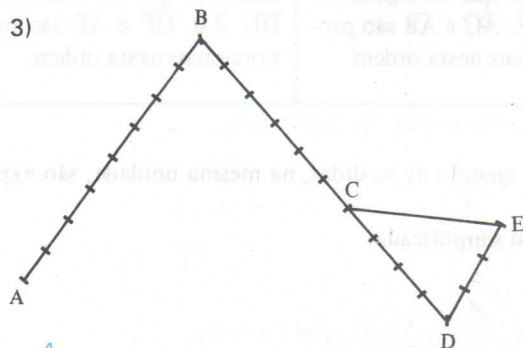
$\frac{PB}{BQ} = \frac{2}{1}$

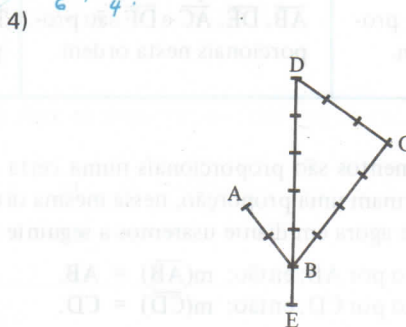
3) L ——— M (B)

$\frac{BM}{LM} = \frac{1}{2}$

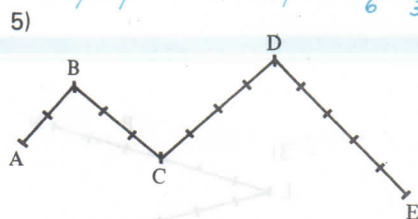
c) Verifique na figura se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são proporcionais nesta ordem:

1)

São proporcionais, pois: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$.

2)

Não são proporcionais, pois: $\frac{8}{6} \neq \frac{3}{4}$

3)

São proporcionais, pois: $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

4)

São proporcionais, pois: $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$.

5)

Não são proporcionais, pois: $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{5}$.

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

1) Determine a medida do segmento $\overline{CD}$ e do segmento $\overline{DE}$, conforme a figura:

Sabemos que $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são proporcionais nesta ordem e que $m(\overline{AB}) = 2$ cm, $m(\overline{BC}) = 5$ cm e $m(\overline{CE}) = 21$ cm.

Resolução:

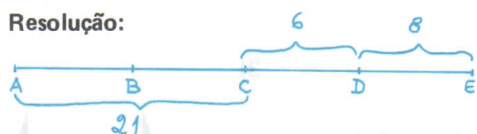
$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow \frac{AB + BC}{BC} = \frac{CD + DE}{DE}$$

$$\frac{2+5}{5} = \frac{21}{DE} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{21}{DE} \Rightarrow DE = \frac{5 \cdot 21}{7} = 15$$

$$CD + DE = CE$$
$$CD + 15 = 21$$
$$CD = 6$$

Resposta: CD = 6 cm, e DE = 15 cm.

2) Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são colineares e proporcionais nesta ordem. Sabendo que $m(\overline{AC}) = 21$ cm, $m(\overline{CD}) = 6$ cm e $m(\overline{DE}) = 8$ cm, determine a medida do segmento $\overline{AB}$ e do segmento $\overline{BC}$:

Resolução:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DE} \Longrightarrow \frac{AB + BC}{BC} = \frac{CD + DE}{DE}$$

$$\frac{21}{BC} = \frac{6 + 8}{8}$$

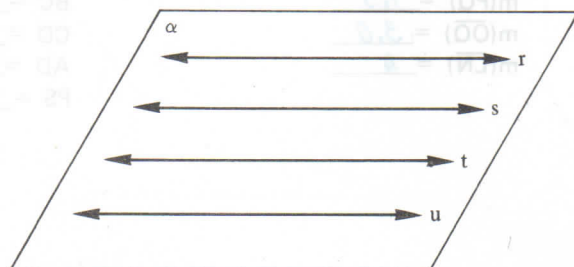
$$\frac{21}{BC} = \frac{14}{8} \Longrightarrow BC = \frac{21 \cdot 8}{14} = 12$$

$$AB + BC = AC$$
$$AB + 12 = 21$$
$$AB = 9$$

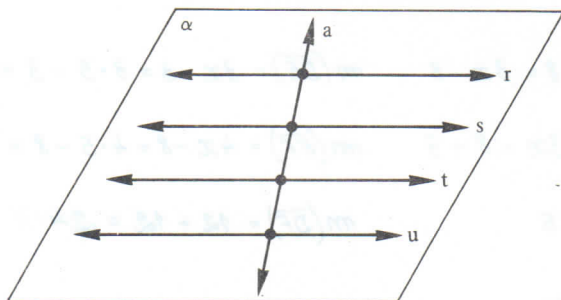
Resposta: AB = 9 cm, e BC = 12 cm

NOÇÃO DE FEIXE DE PARALELAS

Dá-se o nome de feixe de paralelas ao conjunto de mais de duas retas coplanares e paralelas.

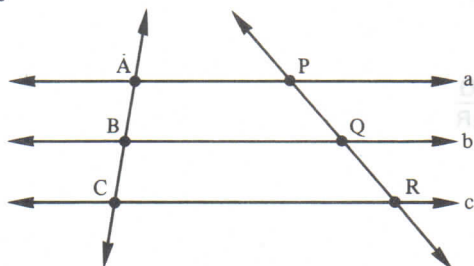
Veja:

$r \subset \alpha$
$s \subset \alpha$
$t \subset \alpha$
$u \subset \alpha$
e $r \parallel s \parallel t \parallel u$

As retas **r**, **s**, **t** e **u** constituem um feixe de paralelas.

Se nesse plano você traçar uma reta que não participe do feixe, ela irá interceptar todas as retas do feixe. Tal reta recebe o nome de **transversal** ou **secante**.

A reta a é uma transversal ao feixe formado pelas retas **r**, **s**, **t** e **u**.

Vejamos agora algumas propriedades:

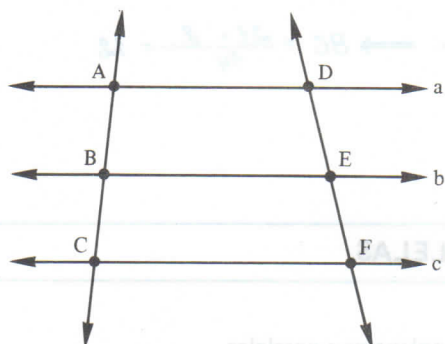
1.ª) Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes em uma transversal, então determinará segmentos congruentes sobre qualquer outra transversal.

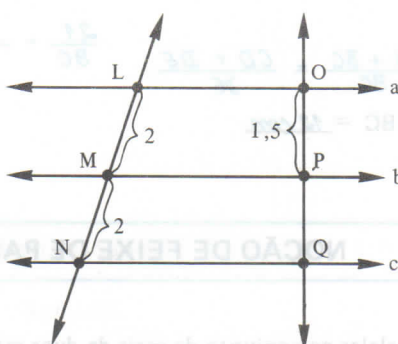
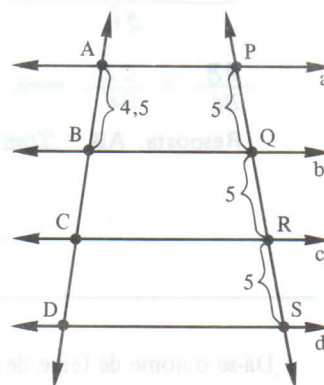
Veja:

$a \parallel b \parallel c$

Se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{PQ} \cong \overline{QR}$.

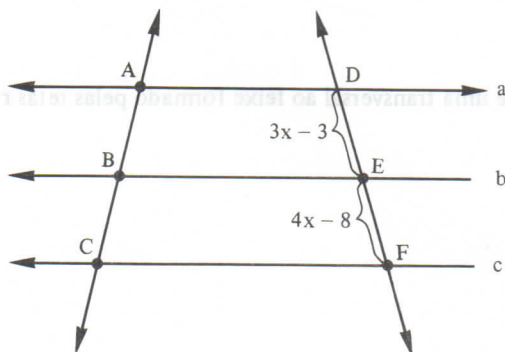
EXERCÍCIO

Complete conforme se pede (a // b // c // d):

1) 2) 3)

1)
$m(\overline{AB}) = 4$ cm
$m(\overline{BC}) = 4$ cm
$m(\overline{DE}) = 5$ cm
$m(\overline{EF}) =$ 5 cm
$m(\overline{AC}) =$ 8 cm
$m(\overline{DF}) =$ 10 cm

2)
$m(\overline{PQ}) =$ 1,5
$m(\overline{OQ}) =$ 3,0
$m(\overline{LN}) =$ 4

3)
BC = 4,5
CD = 4,5
AD = 13,5
PS = 15

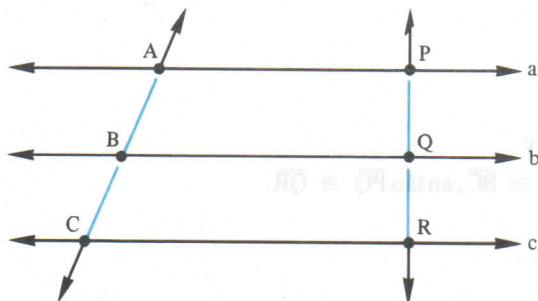
DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Sabendo que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes e que as retas **a, b** e **c** são paralelas, determine $m(\overline{DE})$ e $m(\overline{DF})$, conforme a figura:

$4x - 8 = 3x - 3$ $m(\overline{DE}) = 3x - 3 = 3 \cdot 5 - 3 = 12$

$4x - 3x = 8 - 3$ $m(\overline{EF}) = 4x - 8 = 4 \cdot 5 - 8 = 12$

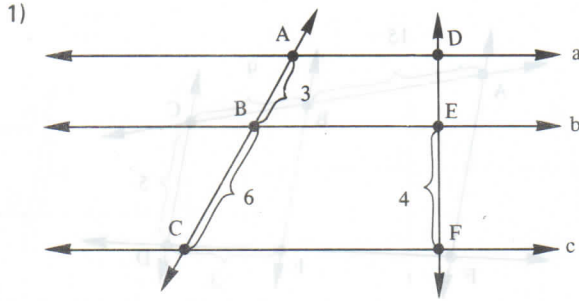
$x = 5$ $m(\overline{DF}) = 12 + 12 = 24$

2.ª) Um feixe de paralelas determina, em duas transversais, segmentos proporcionais.

Observe:

a // b // c

$$\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$$

Complete adequadamente (a // b // c // d), conforme a figura:

1)

m($\overline{DE}$) = ?

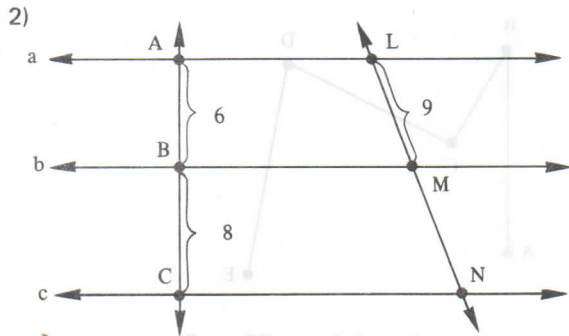
Resolução:

$\frac{3}{6} = \frac{DE}{4}$

$6 \cdot DE = 3 \cdot 4$

$DE = \frac{12}{6} = 2$

Logo: m($\overline{DE}$) = 2.

2)

m($\overline{MN}$) = ?

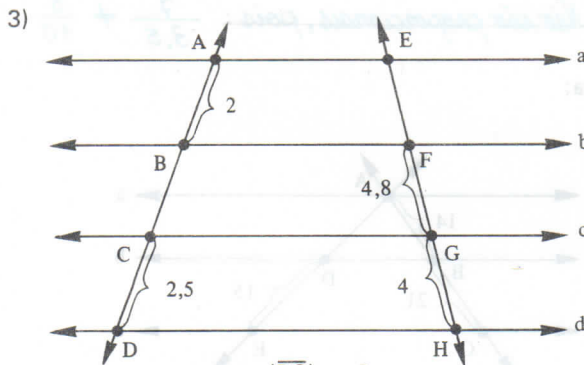
Resolução:

$\frac{6}{8} = \frac{9}{MN}$

$6MN = 8 \cdot 9$

$MN = \frac{72}{6} = 12$

Logo: m($\overline{MN}$) = 12.

3)

m($\overline{BC}$) = ?
m($\overline{EF}$) = ?

Resolução:

$\frac{2}{2,5} = \frac{EF}{4}$

$2,5\,EF = 8$

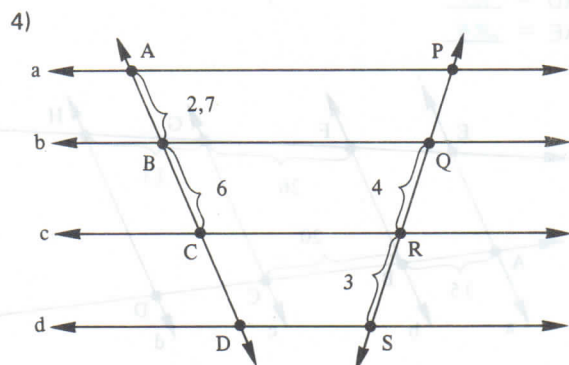
$EF = \frac{8}{2,5} = 3,2$

$\frac{BC}{2,5} = \frac{4,8}{4}$

$4BC = 12$

$BC = 3$

Logo: m($\overline{BC}$) = 3, e m($\overline{EF}$) = 3,2.

4)

CD = ?
PQ = ?

Resolução:

$\frac{2,7}{6} = \frac{PQ}{4}$

$6\,PQ = 10,8$

$PQ = \frac{10,8}{6} = 1,8$

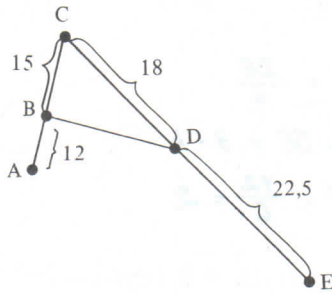
$\frac{6}{CD} = \frac{4}{3}$

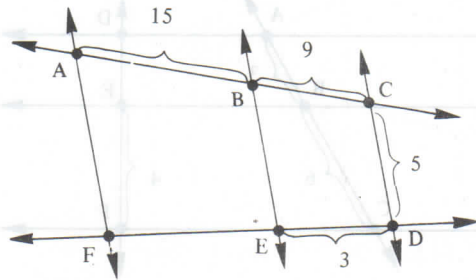
$4CD = 18$

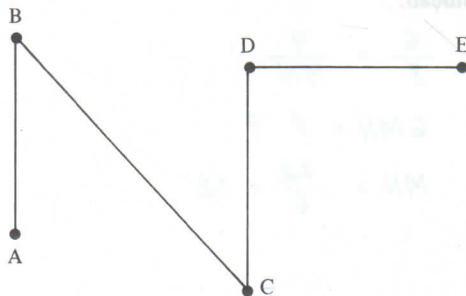
$CD = \frac{18}{4} = 4,5$

Logo: CD = 4,5, e PQ = 1,8.

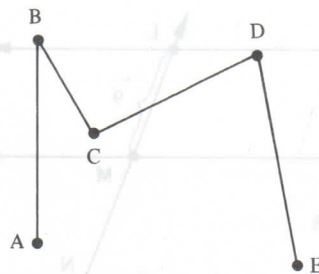
a) De acordo com a figura, verifique se os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são proporcionais nesta ordem:

1)

São proporcionais, pois: $\frac{12}{15} = \frac{18}{22,5}$.

2)

São proporcionais, pois: $\frac{15}{9} = \frac{5}{3}$.

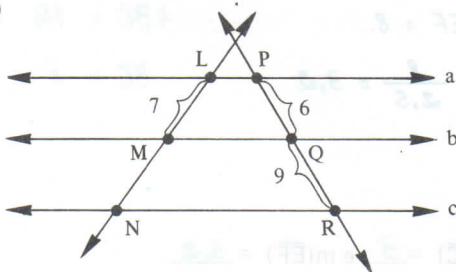
3)

AB = 3 cm; BC = 6 cm; CD = 4,5 cm e DE = 8 cm.

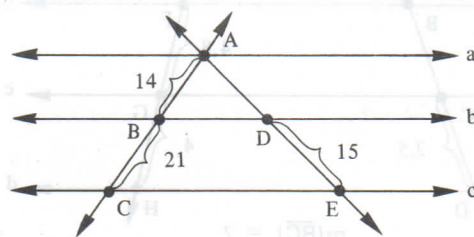
Não são proporcionais, pois: $\frac{3}{6} \neq \frac{4,5}{8}$.

4)

AB = 7 cm; BC = 3,5 cm; CD = 5 cm e DE = 10 cm.

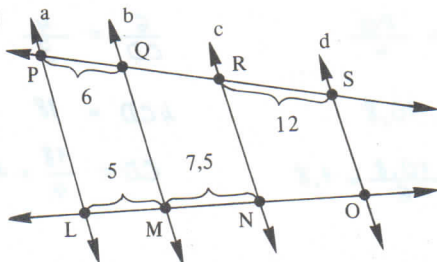
Não são proporcionais, pois: $\frac{7}{3,5} \neq \frac{5}{10}$

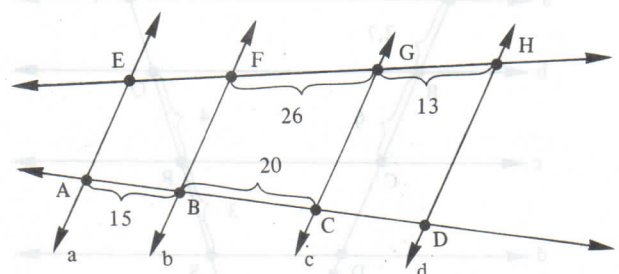
b) Complete adequadamente (a // b // c // d), conforme a figura:

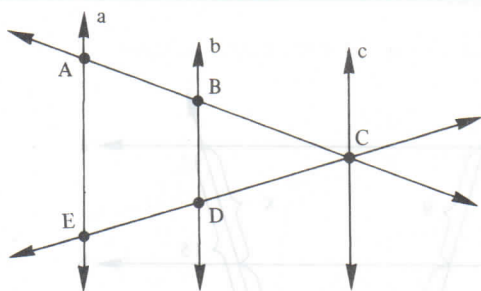
1)

MN = 10,5

2)

AD = 10

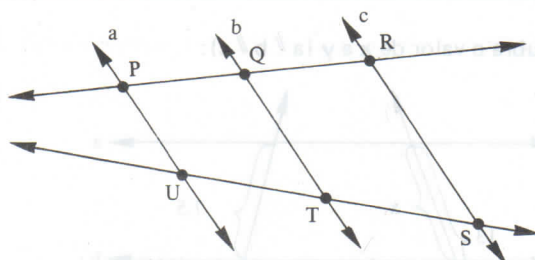
AE = 25

3)

QR = 9 ; NO = 10 ; PS = 27 e LO = 22,5.

4)

EF = 19,5 ; CD = 10 ; EG = 45,5 ; BD = 30 e AD = 45.

5)

AB = 11 cm; BC = 11 cm e CD = 12 cm.

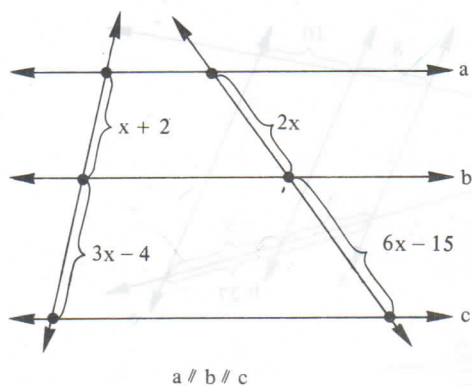
Então: DE = 12 cm.

6)

PQ = 8,5 dm; QR = 8,5 dm e UT = 10 dm.

Então: ST = 10 dm e SU = 20 dm.

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Determine o valor de **x**, conforme a figura:

a // b // c

$\frac{x+2}{3x-4} = \frac{2x}{6x-15}$

$(3x-4)2x = 6x^2 - 8x$

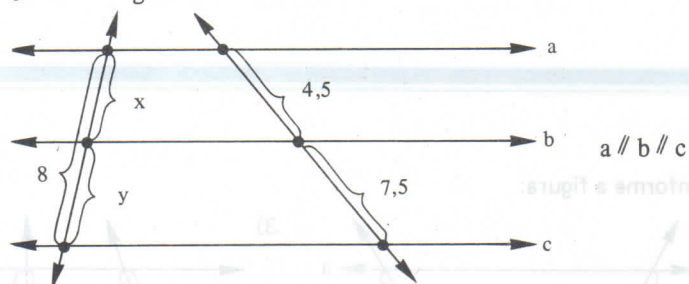
$(x+2)(6x-15) = 6x^2 - 3x - 30$

$6x^2 - 3x - 30 = 6x^2 - 8x$

$-3x + 8x = 30$

$5x = 30 \Rightarrow x = 6$

UMA APLICAÇÃO DAS TRANSFORMADAS DE UMA PROPORÇÃO

Observe a figura:

a // b // c

Como agir para determinar x e y?

Veja:

Aplicando a 2.ª propriedade, temos: $\frac{x}{y} = \frac{4,5}{7,5}$.

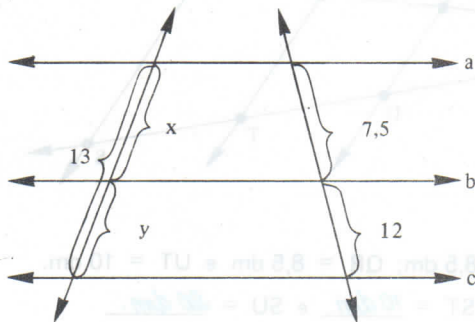
$\boxed{\frac{x}{y} = \frac{4,5}{7,5}}$

$\frac{x+y}{x} = \frac{4,5+7,5}{4,5} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{12}{4,5} \Rightarrow 12x = 36 \Rightarrow x = 3$

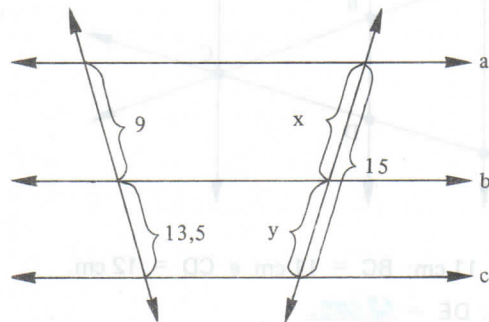
$\frac{x+y}{y} = \frac{4,5+7,5}{7,5} \Rightarrow \frac{8}{y} = \frac{12}{7,5} \Rightarrow 12y = 60 \Rightarrow y = 5$

VAMOS EXERCITAR

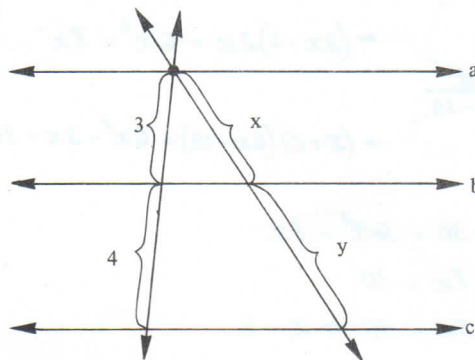
Descubra o valor de **x** e **y** (a // b // c):

1)

x = 5

y = 8

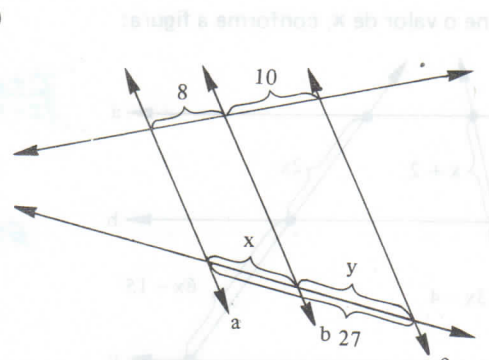
2)

x = 6

y = 9

3)

x + y = 10,5

x = 4,5

y = 6

4)

x = 12

y = 15

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Determine o valor de **x**, **y** e **z** (a // b // c // d), conforme a figura:

1)

x = 7,5

2)

x = 12

3)

x = 13,5

4) 5) 6)

4) x = 10, y = 7,5, z = 12,5

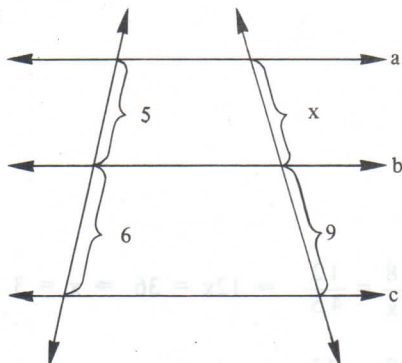
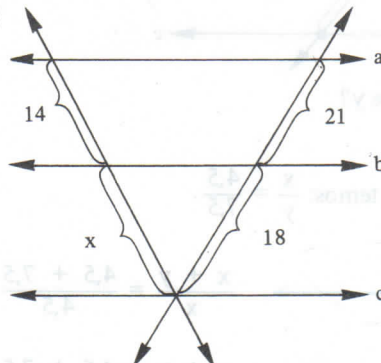
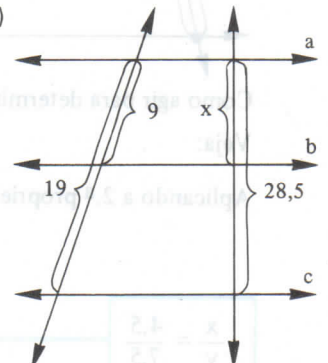
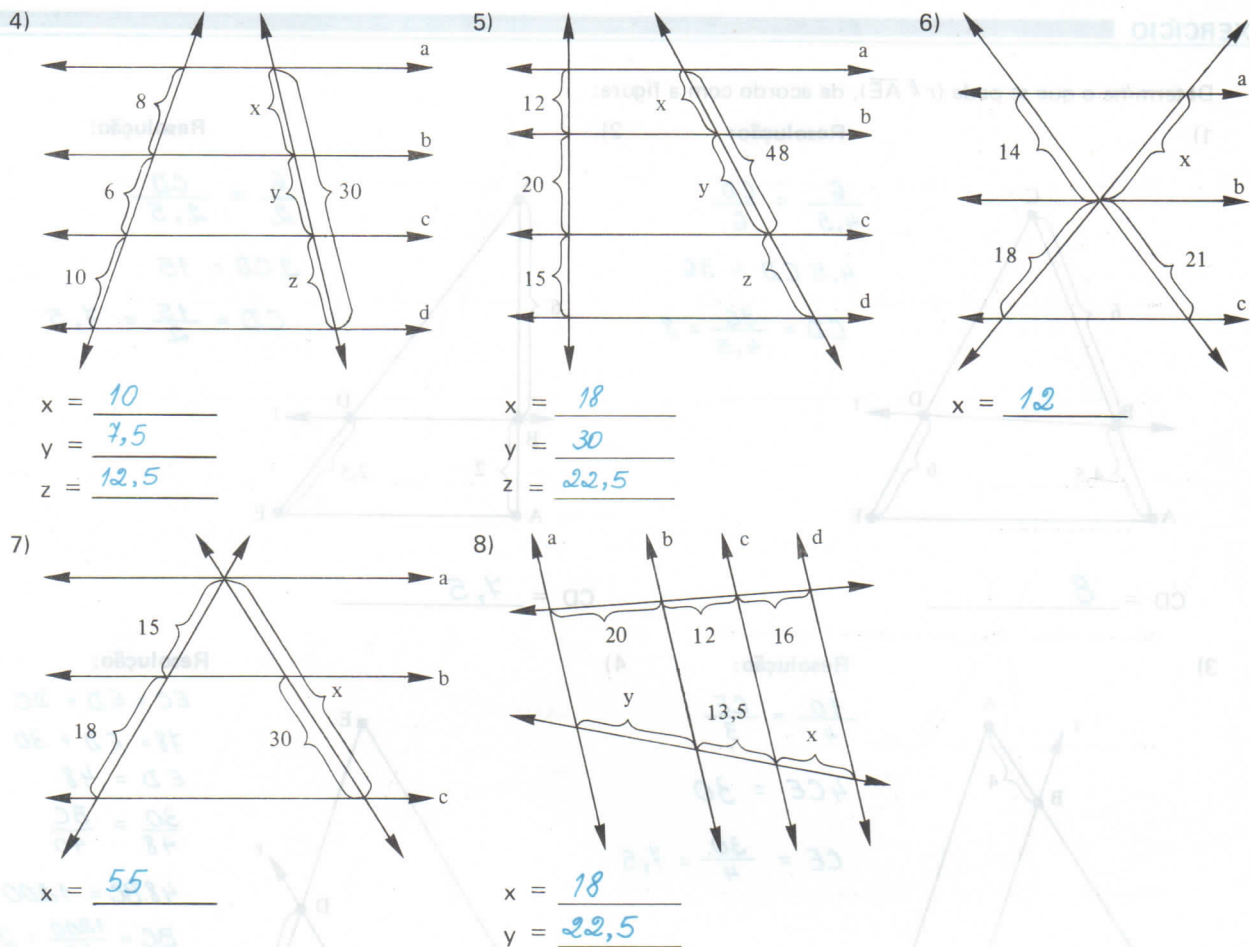
5) x = 18, y = 30, z = 22,5

6) x = 12

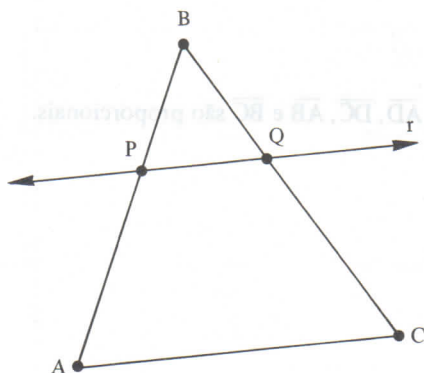
7)

x = 55

8)

x = 18

y = 22,5

SEGMENTOS PROPORCIONAIS DETERMINADOS NUM TRIÂNGULO

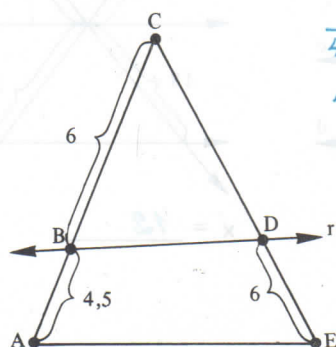
Com relação aos segmentos proporcionais determinados nos lados de um triângulo, você deve conhecer os seguintes casos:

1.º caso: Uma paralela a um dos lados de um triângulo, de modo que intercepte os outros dois lados em pontos distintos, determina nesses dois lados segmentos proporcionais.

$r \parallel \overline{AC} \Rightarrow \overline{BP}, \overline{PA}, \overline{BQ}$ e $\overline{QC}$ são proporcionais.

$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

EXERCÍCIO

Determine o que se pede ($r \parallel \overline{AE}$), de acordo com a figura:

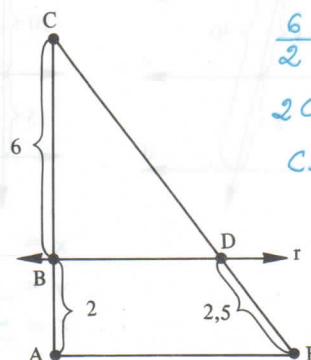
1)

Resolução:

$\frac{6}{4,5} = \frac{CD}{6}$

$4,5\,CD = 36$

$CD = \frac{36}{4,5} = 8$

CD = 8

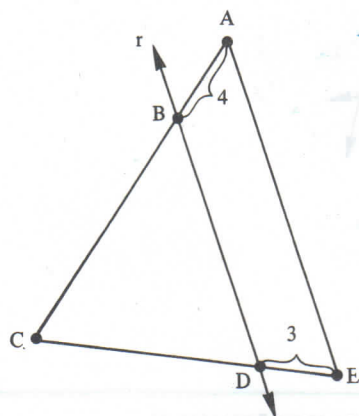
2)

Resolução:

$\frac{6}{2} = \frac{CD}{2,5}$

$2\,CD = 15$

$CD = \frac{15}{2} = 7,5$

CD = 7,5

3)

Resolução:

$\frac{10}{4} = \frac{CE}{3}$

$4\,CE = 30$

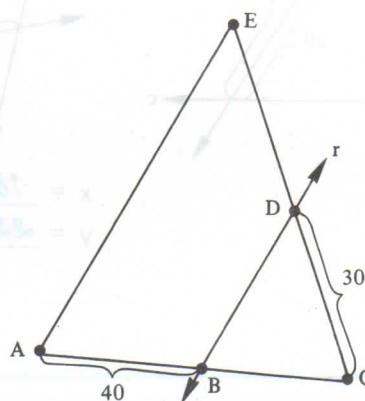
$CE = \frac{30}{4} = 7,5$

AC = 10

CE = 7,5

CD = 4,5

BC = 6

4)

Resolução:

$EC = ED + DC$

$78 = ED + 30$

$ED = 48$

$\frac{30}{48} = \frac{BC}{40}$

$48\,BC = 1200$

$BC = \frac{1200}{48} = 25$

$AC = AB + BC$

$AC = 40 + 25$

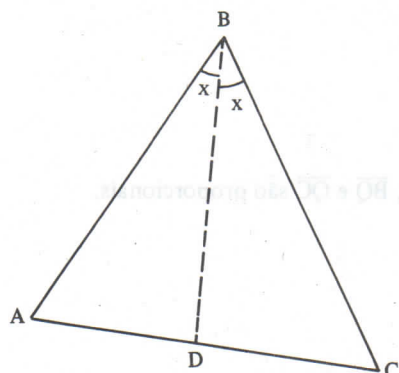
$AC = 65$

EC = 78

ED = 48

BC = 25

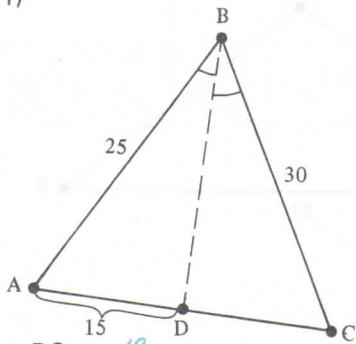
AC = 65

2.º caso: A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, no lado oposto a este ângulo, dois segmentos proporcionais aos outros dois lados deste triângulo.

$\overline{BD}$ é bissetriz $\Rightarrow$ $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

EXERCÍCIO

Determine o que se pede, conforme a figura:

1)

DC = 18

AC = 33

Resolução:

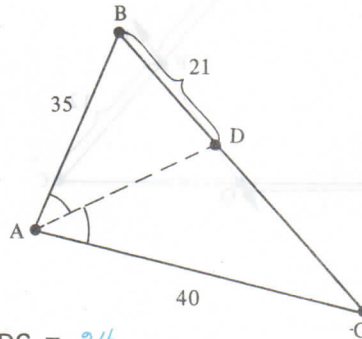
$\frac{15}{DC} = \frac{25}{30}$

$25DC = 450$

$DC = \frac{450}{25} = 18$

$AC = AD + DC$

$AC = 15 + 18 = 33$

2)

DC = 24

BC = 45

Resolução:

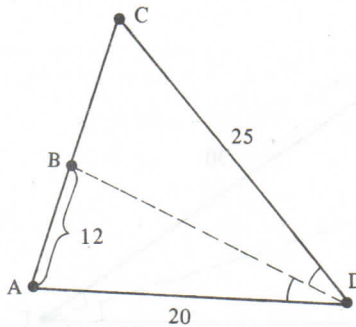
$\frac{DC}{21} = \frac{40}{35}$

$35DC = 840$

$DC = \frac{840}{35} = 24$

$BC = BD + DC$

$BC = 21 + 24 = 45$

3)

BC = 15

AC = 27

Resolução:

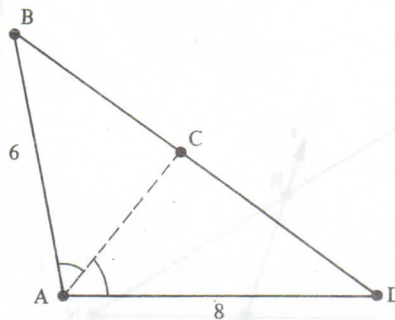
$\frac{12}{BC} = \frac{20}{25}$

$20BC = 300$

$BC = \frac{300}{20} = 15$

$AC = AB + BC$

$AC = 12 + 15 = 27$

4)

BD = 12,25

BC = 5,25

CD = 7

Resolução:

$\frac{BC}{CD} = \frac{6}{8}$

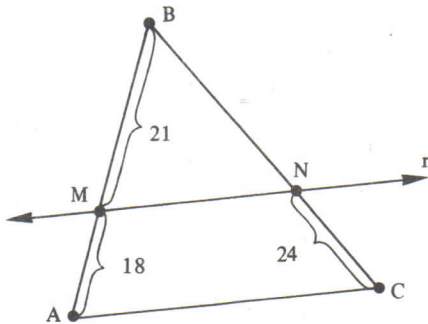
$\frac{BC + CD}{CD} = \frac{6 + 8}{8}$

$\frac{12,25}{CD} = \frac{14}{8}$

$CD = \frac{98}{14} = 7$

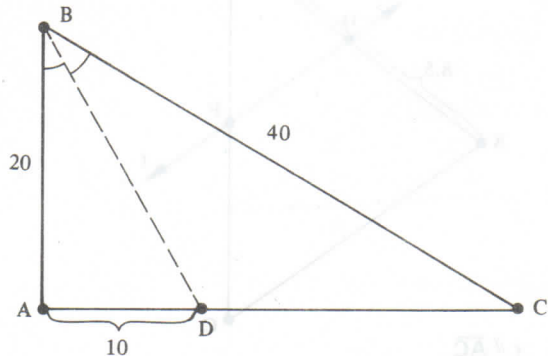
VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Observe a figura e determine as medidas:

1)

r // $\overline{AC}$

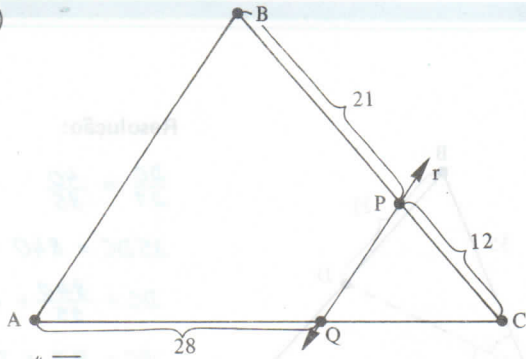
BN = 28

BC = 52

2)

$\overline{BD}$ é bissetriz de $\hat{B}$.

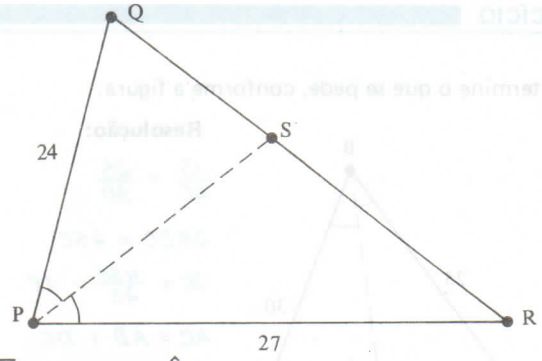
DC = 20

AC = 30

3)

r // $\overline{AB}$

QC = 16

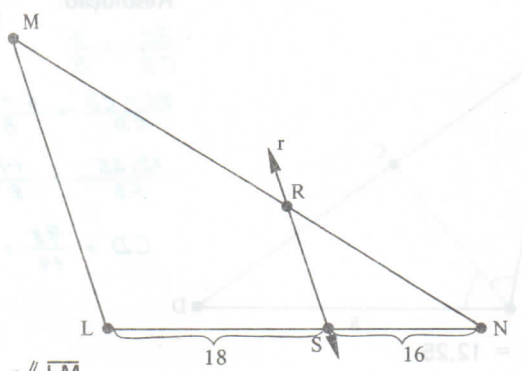
AC = 44

4)

$\overline{PS}$ é bissetriz de $\hat{P}$.

QR = 25,5

QS = 12

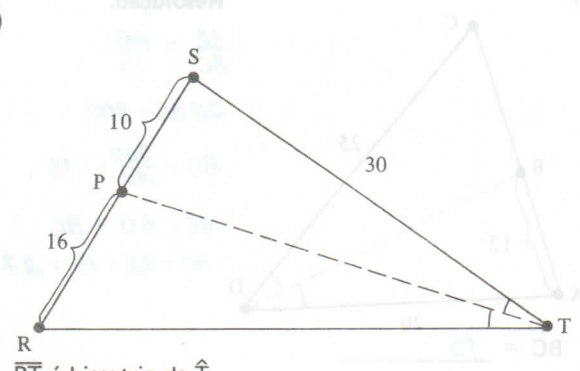
SR = 13,5

5)

r // $\overline{LM}$

MN = 51

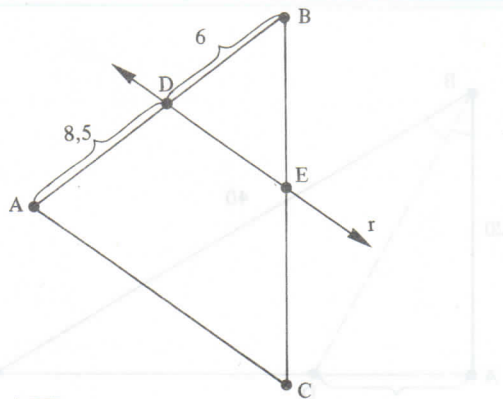
MR = 27

RN = 24

6)

$\overline{PT}$ é bissetriz de $\hat{T}$.

RT = 48

7)

r // $\overline{AC}$

BC = 29

BE = 12

EC = 17

a) Descubra o valor representado por **x** e **y** (a // b // c // d), conforme a figura:

1)

x = 3

2)

x = 3

3)

x = 20

4)

x = 12
y = 9

5)

x = 4
y = 28

6)

x = 13,5
y = 7,5

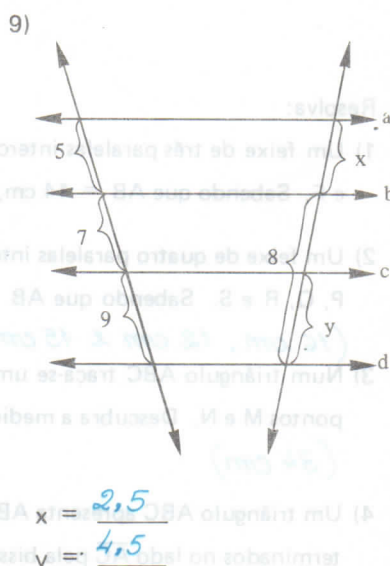
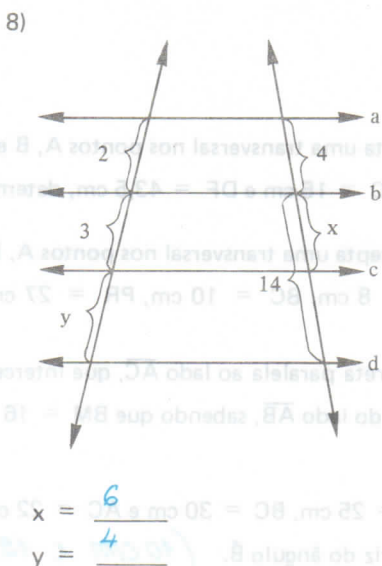
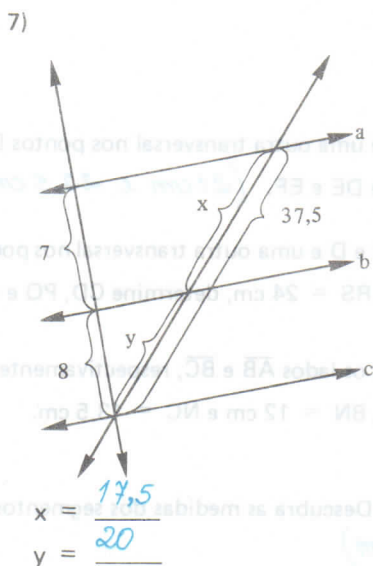
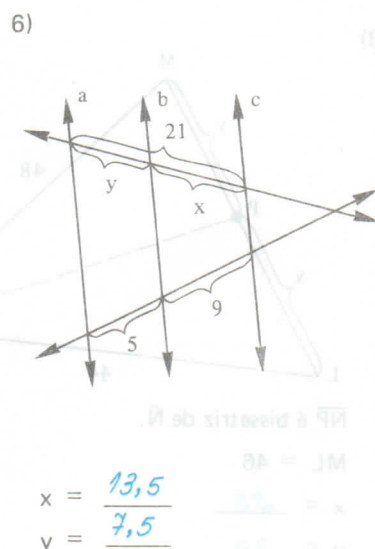
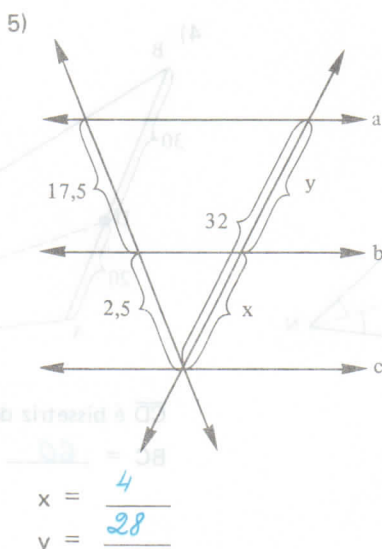
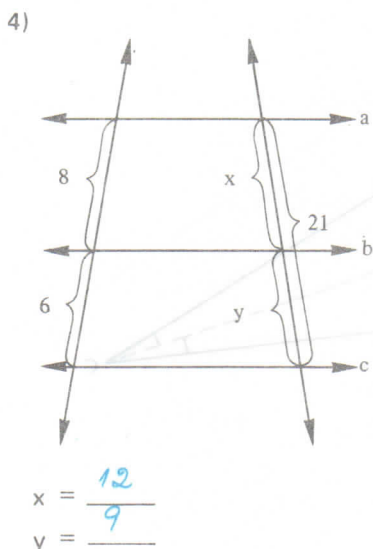
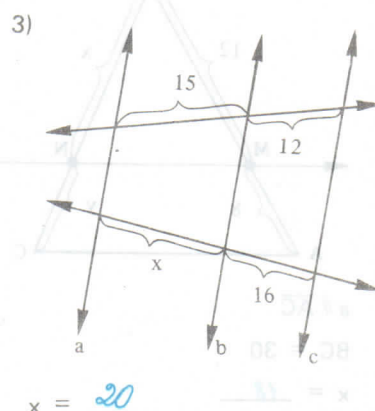
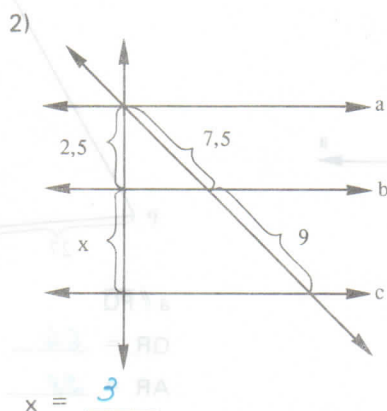
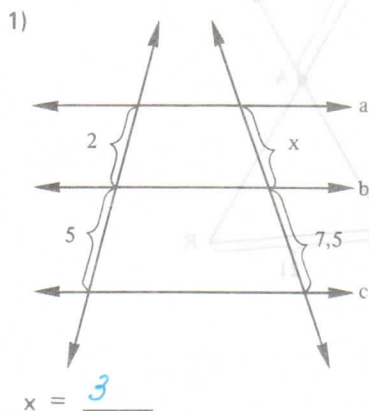
7)

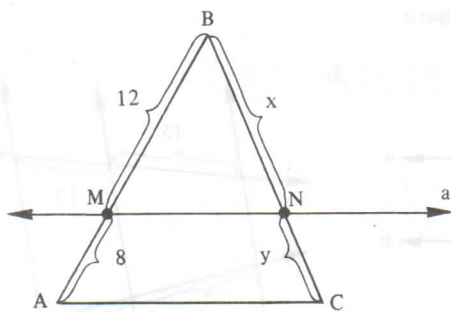
x = 17,5
y = 20

8)

x = 6
y = 4

9)

x = 2,5
y = 4,5

b) Complete de acordo com a figura:

1)

a // $\overline{AC}$

BC = 30

x = 18

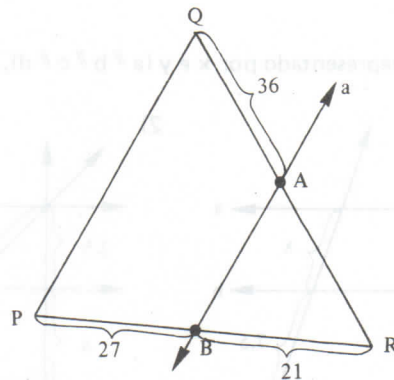
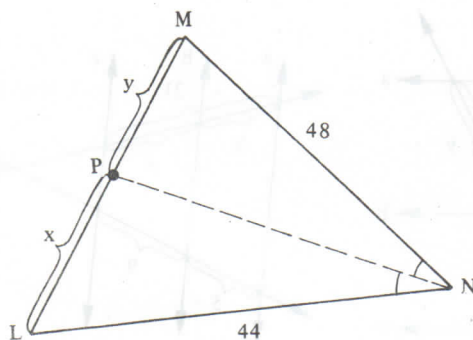
y = 12

2)

a // $\overline{PQ}$

QR = 64

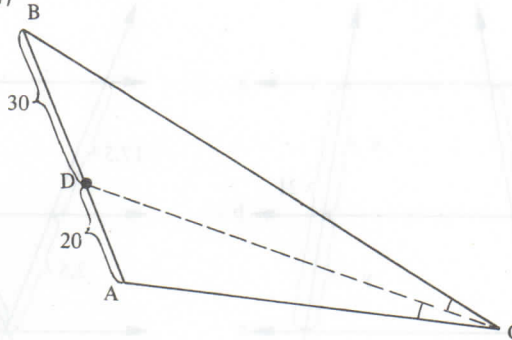
AR = 28

3)

$\overline{NP}$ é bissetriz de $\hat{N}$.

ML = 46

x = 22

y = 24

4)

$\overline{CD}$ é bissetriz de $\hat{C}$.

BC = 60

c) Resolva:

1) Um feixe de três paralelas intercepta uma transversal nos pontos A, B e C e uma outra transversal nos pontos D, E e F. Sabendo que AB = 14 cm, BC = 15 cm e DF = 43,5 cm, determine DE e EF. (21 cm e 22,5 cm)

2) Um feixe de quatro paralelas intercepta uma transversal nos pontos A, B, C e D e uma outra transversal nos pontos P, Q, R e S. Sabendo que AB = 8 cm, BC = 10 cm, PR = 27 cm e RS = 24 cm, determine CD, PQ e QR. (16 cm, 12 cm e 15 cm)

3) Num triângulo ABC traça-se uma reta paralela ao lado $\overline{AC}$, que intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente nos pontos M e N. Descubra a medida do lado $\overline{AB}$, sabendo que BM = 16 cm, BN = 12 cm e NC = 13,5 cm. (34 cm)

4) Um triângulo ABC apresenta AB = 25 cm, BC = 30 cm e AC = 22 cm. Descubra as medidas dos segmentos determinados no lado $\overline{AC}$ pela bissetriz do ângulo $\hat{B}$. (10 cm e 12 cm)

Unidade 11

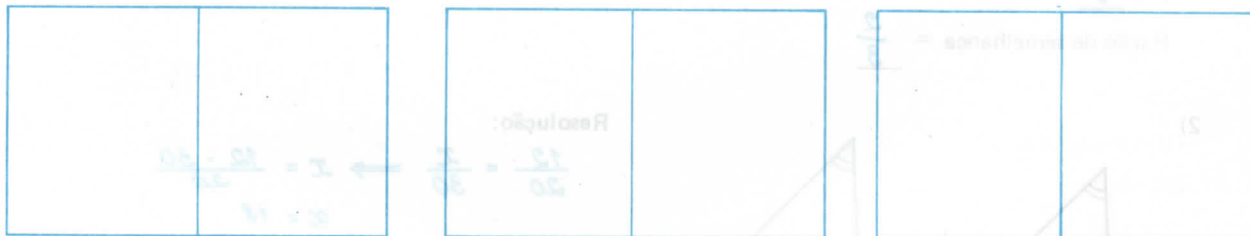
A SEMELHANÇA

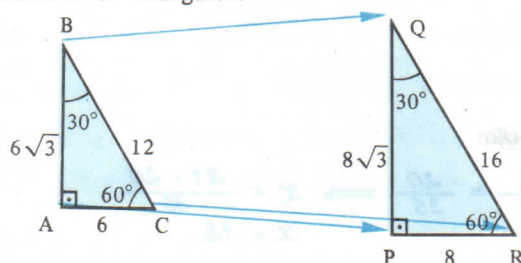
NOÇÃO DE SEMELHANÇA

Observe as figuras:

Perceba que as figuras têm a mesma forma, mas são de tamanhos diferentes. Tais figuras são **semelhantes**.

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Desenhe três pares de figuras semelhantes:

A SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Observe os triângulos:

Perceba que:

- Os ângulos que se correspondem são congruentes:

  $\hat{A} \cong \hat{P}$ (90°)

  $\hat{B} \cong \hat{Q}$ (30°)

  $\hat{C} \cong \hat{R}$ (60°)

- Os lados que se correspondem são proporcionais:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{BC}{QR} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \qquad \frac{AC}{PR} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

Pois bem, note que esses dois triângulos são de tamanhos diferentes, mas possuem a mesma forma. Por isso, são **triângulos semelhantes.**

Logo: **Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos que se correspondem são congruentes e os lados que se correspondem são proporcionais.**

Indicação: $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

razão de semelhança

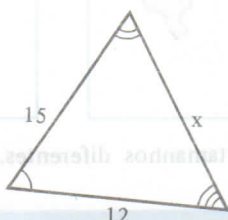
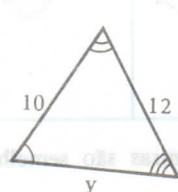
VAMOS EXERCITAR

Os triângulos dados são semelhantes. Complete o que se pede:

1)

x = 18

y = 8

Razão de semelhança = $\frac{2}{3}$

Resolução:

$\frac{10}{15} = \frac{12}{x} \Longrightarrow x = \frac{15 \cdot 12}{10}$

$x = 18$

$\frac{10}{15} = \frac{y}{12} \Longrightarrow y = \frac{10 \cdot 12}{15}$

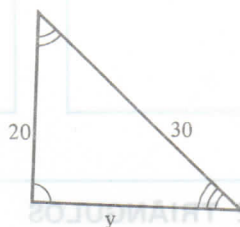
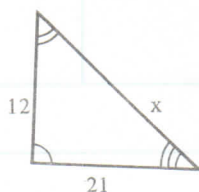
$y = 8$

$\frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

2)

x = 18

y = 35

Razão de semelhança = $\frac{3}{5}$

Resolução:

$\frac{12}{20} = \frac{x}{30} \Longrightarrow x = \frac{12 \cdot 30}{20}$

$x = 18$

$\frac{12}{20} = \frac{21}{y} \Longrightarrow y = \frac{20 \cdot 21}{12}$

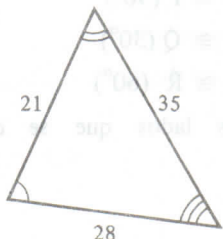
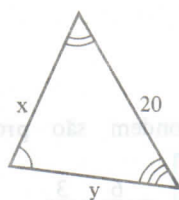
$y = 35$

$\frac{12}{20} = \frac{18}{30} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$

3)

x = 12

y = 16

Razão de semelhança = $\frac{4}{7}$

Resolução:

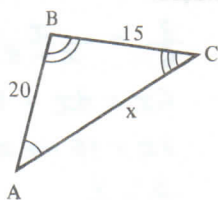
$\frac{x}{21} = \frac{20}{35} \Longrightarrow x = \frac{21 \cdot 20}{35}$

$x = 12$

$\frac{y}{28} = \frac{20}{35} \Longrightarrow y = \frac{28 \cdot 20}{35}$

$y = 16$

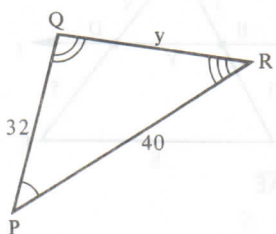
$\frac{12}{21} = \frac{20}{35} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

4)

x = 25

y = 24

Razão de semelhança = $\frac{5}{8}$

Perímetro do $\triangle ABC$ = 60

Perímetro do $\triangle PQR$ = 96

Resolução:

$\frac{20}{32} = \frac{15}{y} \implies y = \frac{32 \cdot 15}{20}$

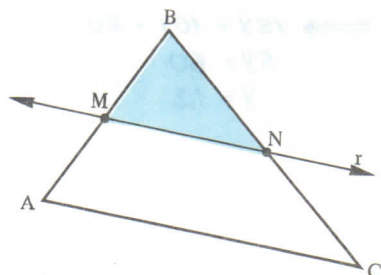
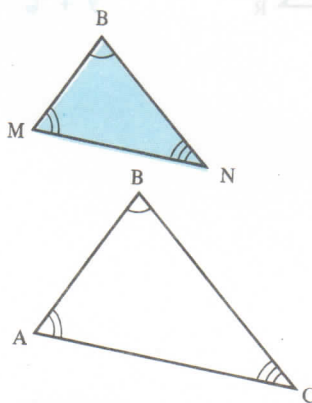
$y = 24$

$\frac{20}{32} = \frac{x}{40} \implies x = \frac{20 \cdot 40}{32}$

$x = 25$

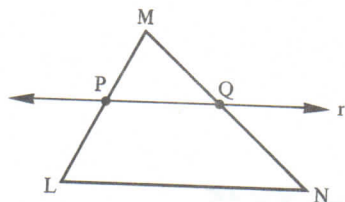
$\frac{15}{24} = \frac{20}{32} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL

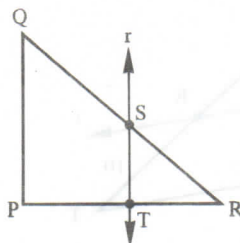
Uma paralela a um dos lados de um triângulo, que intercepta os outros dois lados em pontos distintos, determina um segundo triângulo semelhante ao primeiro.

Logo: $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$

EXERCÍCIO

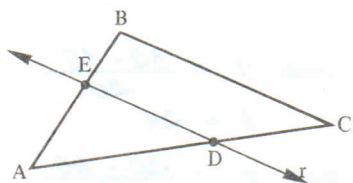
Complete conforme a figura:

1)

r // $\overline{LN}$, então $\triangle MLN \sim \triangle MPQ$

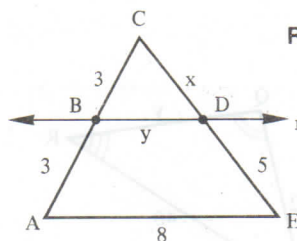
Logo: $\frac{MP}{ML} = \frac{MQ}{MN} = \frac{PQ}{LN}$; $\hat{P} \cong \hat{L}$; $\hat{Q} \cong \hat{N}$

2)

r // $\overline{QP}$, então $\triangle PQR \sim \triangle TSR$

Logo: $\frac{QR}{SR} = \frac{QP}{ST} = \frac{PR}{TR}$; $\hat{S} \cong \hat{Q}$; $\hat{T} \cong \hat{P}$

3)

r // $\overline{BC}$, então $\triangle ABC \sim \triangle AED$

Logo: $\begin{cases} \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC} = \frac{ED}{BC} \\ \hat{E} \cong \hat{B} \\ \hat{D} \cong \hat{C} \end{cases}$

4)

r // $\overline{AE}$

x = 5

y = 4

Perímetro do $\triangle BCD$ = 12

Perímetro do $\triangle ACE$ = 24

Perímetro do □ABDE = 20

Resolução:

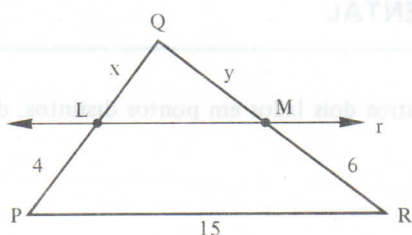
$\frac{3}{6} = \frac{x}{x+5}$

$6x = 3x + 15$

$3x = 15 \Rightarrow x = 5$

$\frac{3}{6} = \frac{y}{8}$

$6y = 24 \Rightarrow y = 4$

5)

r // $\overline{PR}$

$\triangle QLM \sim \triangle PQR$

x = 8

y = 12

Perímetro do $\triangle QLM$ = 30

Perímetro do $\triangle PQR$ = 45

Perímetro do □PLMR = 35

Resolução:

$\frac{x}{x+4} = \frac{10}{15} \Longrightarrow 15x = 10x + 40$

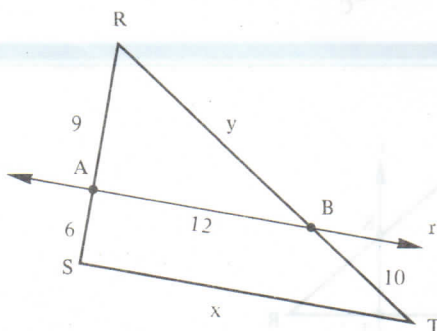
$5x = 40$

$x = 8$

$\frac{y}{y+6} = \frac{10}{15} \Longrightarrow 15y = 10y + 60$

$5y = 60$

$y = 12$

6)

r // $\overline{ST}$

$\triangle SRT \sim \triangle ARB$

x = 20

y = 15

Perímetro do $\triangle ARB$ = 36

Perímetro do $\triangle SRT$ = 60

Perímetro do □SABT = 48

Resolução:

$\frac{9}{15} = \frac{12}{x}$

$9x = 180$

$x = 20$

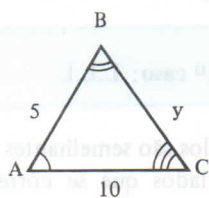
$\frac{9}{15} = \frac{y}{y+10}$

$15y = 9y + 90$

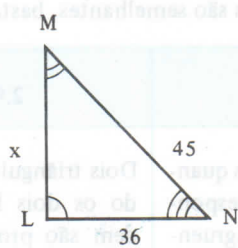
$6y = 90 \Rightarrow y = 15$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

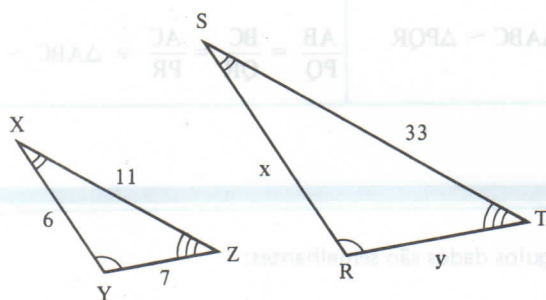
a) Descubra o que se pede, para os seguintes triângulos semelhantes:

1)

x = 9

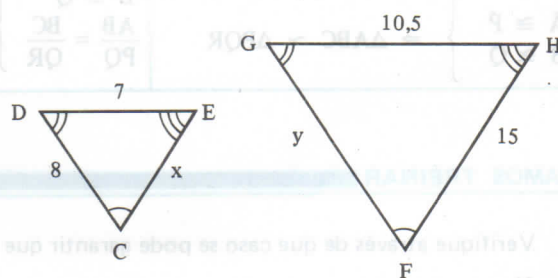
y = 15

2)

x = 27

y = 48

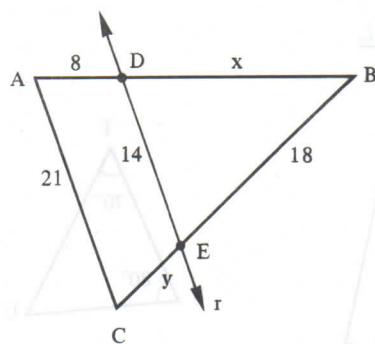
3)

x = 18

y = 21

4)

x = 10

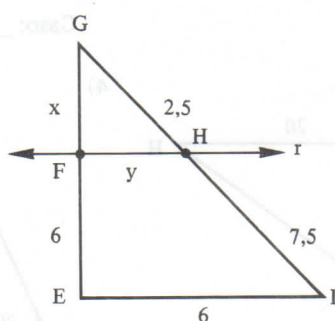
y = 12

b) Determine os valores representados por **x** e **y**:

1)

r // $\overline{AC}$

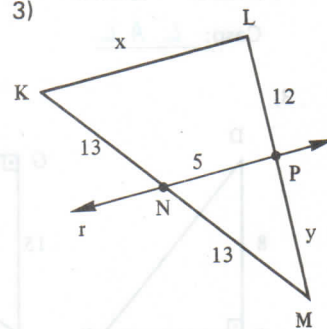
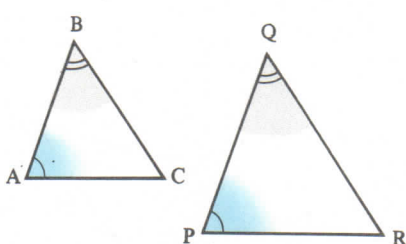
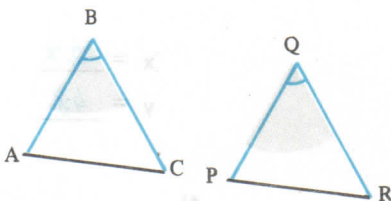
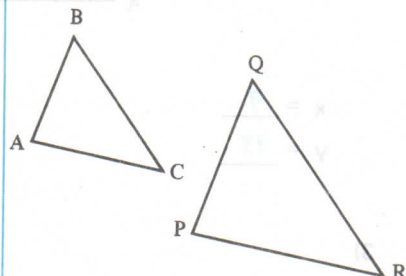
x = 16

y = 9

2)

r // $\overline{EI}$

x = 2

y = 1,5

3)

r // $\overline{KL}$

x = 10

y = 12

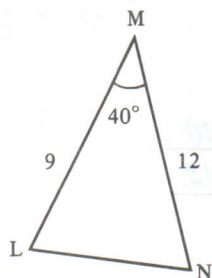
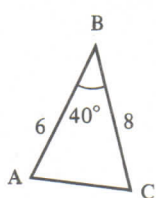
COMO RECONHECER DOIS TRIÂNGULOS SEMELHANTES: OS CASOS DE SEMELHANÇA

Para saber se dois triângulos são semelhantes, basta observar se eles obedecem a um dos seguintes casos:

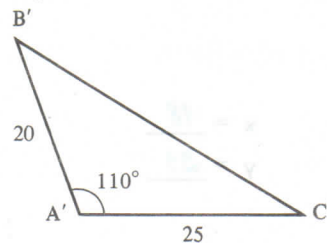
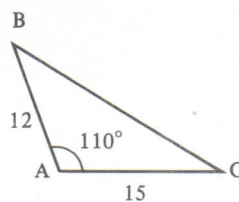
1.º caso: A.A.	2.º caso: L.A.L.	3.º caso: L.L.L.
Dois triângulos são semelhantes quando dois ângulos que se correspondem são respectivamente congruentes. $\hat{A} \cong \hat{P}$, $\hat{B} \cong \hat{Q}$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$	Dois triângulos são semelhantes quando os dois lados que se correspondem são proporcionais e quando os ângulos determinados por estes lados são congruentes. $\hat{B} \cong \hat{Q}$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$	Dois triângulos são semelhantes quando os três lados que se correspondem são proporcionais. $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$

VAMOS TREINAR

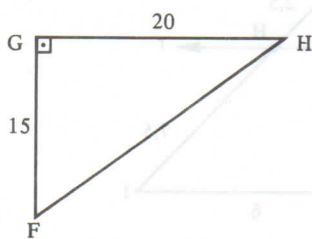
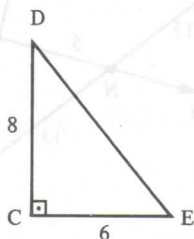
a) Verifique através de que caso se pode garantir que os triângulos dados são semelhantes:

1)

$\Delta ABC \sim \Delta LMN$

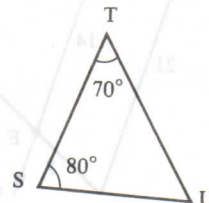
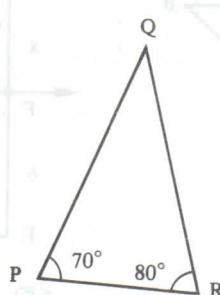
Caso: L.A.L.

2)

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

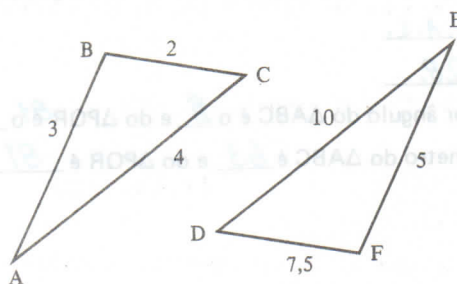
Caso: L.A.L.

3)

$\Delta CDE \sim \Delta FGH$

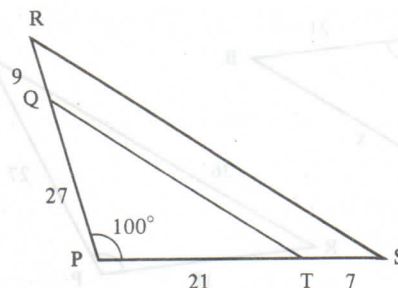
Caso: L.A.L.

4)

$\Delta PQR \sim \Delta STU$

Caso: A.A.

5)

$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

Caso: L.L.L

6)

$\Delta PQT \sim \Delta PRS$

Caso: L.A.L

b) Observe a figura e verifique se existem triângulos semelhantes:

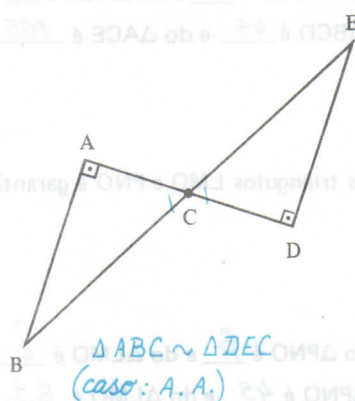
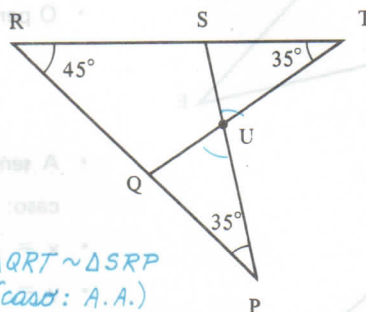
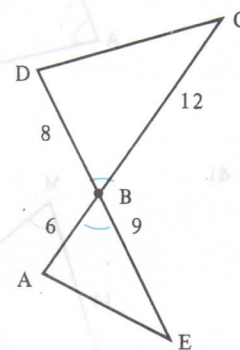
1)

ΔABC ~ ΔDEC
(caso: A.A.)

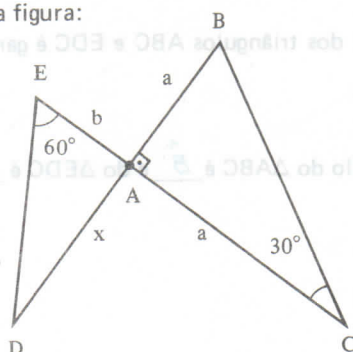
2)

R S T
45° 35°
U
Q
35°
P

ΔQRT ~ ΔSRP
(caso: A.A.)
ΔQUP ~ ΔSUT
(caso: A.A.)

3)

ΔABE ~ ΔDBC
(caso: L.A.L.)

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Dada a figura:

prove que: $b = x$

ΔABC ~ ΔAED (caso: A.A.)

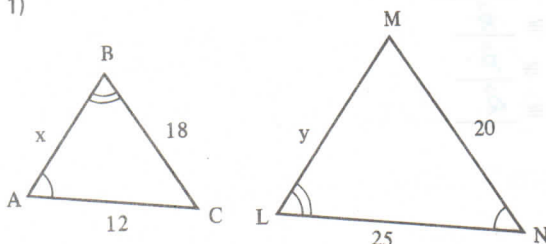
$\frac{a}{b} = \frac{a}{x} \Longrightarrow ab = ax$

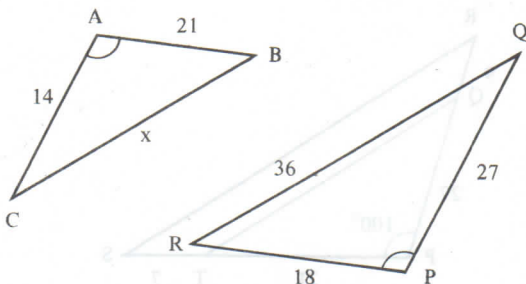
$b = x$

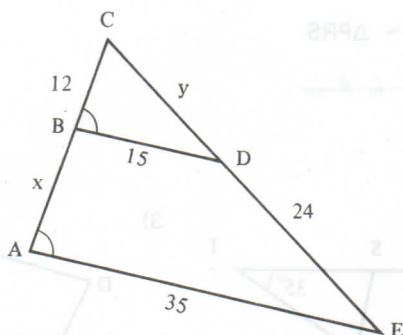
VERIFIQUE O QUE APRENDEU

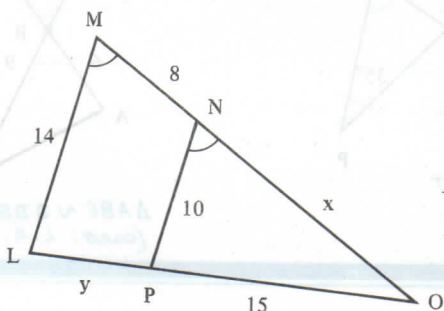
Complete adequadamente, conforme a figura:

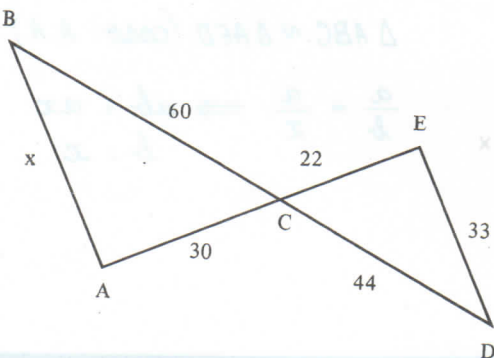
1)

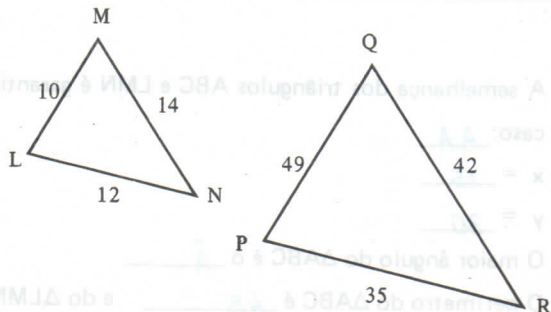
B
x 18
A 12 C

- A semelhança dos triângulos ABC e LMN é garantida pelo caso: A.A.
- $x =$ 15
- $y =$ 30
- O maior ângulo do ΔABC é o $\hat{A}$.
- O perímetro do ΔABC é 45 e do ΔLMN é 75.

2)

- A semelhança dos triângulos ABC e PQR é garantida pelo caso: L.A.L.
- x = 28.
- O menor ângulo do ΔABC é o $\hat{B}$ e do ΔPQR é o $\hat{Q}$.
- O perímetro do ΔABC é 63 e do ΔPQR é 81

3)

- A semelhança dos triângulos BCD e ACE é garantida pelo caso: A.A.
- x = 16
- y = 18
- O menor ângulo do ΔBCD é $\hat{D}$ e do ΔACE é $\hat{E}$.
- O perímetro do ΔBCD é 45 e do ΔACE é 105.

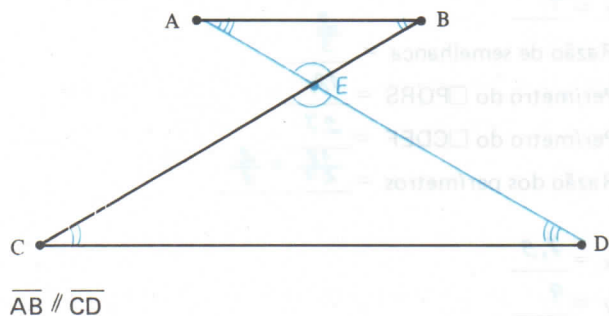
4)

- A semelhança dos triângulos LMO e PNO é garantida pelo caso: A.A.
- x = 20
- y = 6
- O maior ângulo do ΔPNO é $\hat{P}$ e do ΔLMO é $\hat{L}$.
- O perímetro do ΔPNO é 45 e do ΔLMO é 63.

5)

- A semelhança dos triângulos ABC e EDC é garantida pelo caso: L.A.L.
- x = 45
- O menor ângulo do ΔABC é $\hat{B}$ e do ΔEDC é $\hat{D}$.
- $\hat{A} \cong \hat{E}$
- $\hat{B} \cong \hat{D}$
- $\hat{C} \cong \hat{C}$

6)

- A semelhança dos triângulos LMN e PQR é garantida pelo caso: L.L.L.
- $\hat{L} \cong \hat{R}$
- $\hat{M} \cong \hat{P}$
- $\hat{N} \cong \hat{Q}$

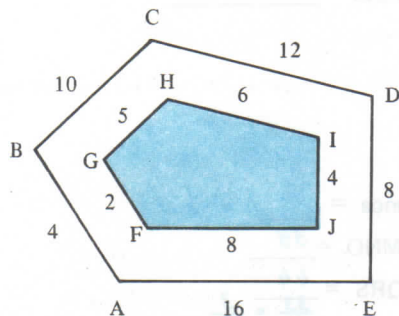
DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Que segmento você deve traçar na figura para obter dois triângulos semelhantes?

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

Devo traçar o segmento $\overline{AD}$

$\Delta EBA \sim \Delta ECD$ $\begin{cases} \hat{E} \cong \hat{E} \text{ (o.p.v.)} \\ \hat{B} \cong \hat{C} \text{ (alternos internos)} \\ \hat{A} \cong \hat{D} \text{ (alternos internos)} \end{cases}$

A SEMELHANÇA DE POLÍGONOS

Observe os pentágonos:

Perceba que:

- Os ângulos que se correspondem são congruentes:

$\hat{A} \cong \hat{F}$ $\quad \hat{C} \cong \hat{H}$ $\quad \hat{E} \cong \hat{J}$

$\hat{B} \cong \hat{G}$ $\quad \hat{D} \cong \hat{I}$

- Os lados que se correspondem são proporcionais:

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HI} = \frac{DE}{IJ} = \frac{EA}{JF}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{12}{6} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \frac{2}{1}$$

Pois bem, note que esses dois pentágonos são de tamanhos diferentes, mas possuem a mesma forma. São então pentágonos semelhantes.

Logo: **Dois polígonos convexos com o mesmo número de lados são semelhantes quando os ângulos que se correspondem são congruentes e os lados que se correspondem são proporcionais.**

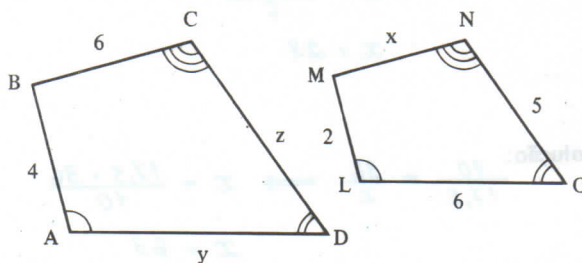
VAMOS EXERCITAR

Dados os polígonos semelhantes, determine o que se pede:

1)

x = *3*

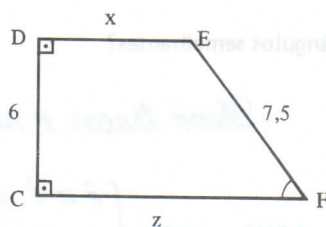
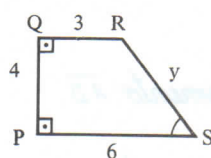
y = *12*

z = *10*

Razão de semelhança = $\frac{2}{1}$

Perímetro do □ABCD = *32*

Perímetro do □LMNO = *16*

Razão dos perímetros = $\frac{32}{16} = \frac{2}{1}$

2)

x = 4,5

y = 5

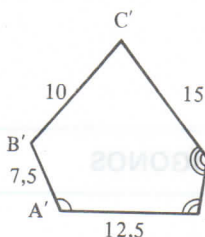
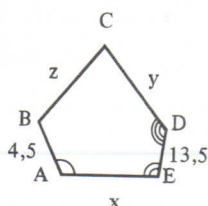
z = 9

Razão de semelhança = $\frac{2}{3}$

Perímetro do □PQRS = 18

Perímetro do □CDEF = 27

Razão dos perímetros = $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$

3)

x = 7,5

y = 9

z = 6

a = 22,5

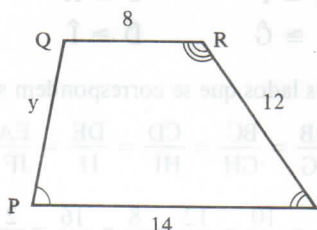
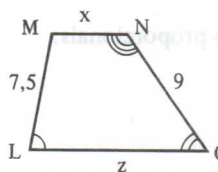
Razão de semelhança = $\frac{3}{5}$

Perímetro do pentágono ABCDE = 40,5

Perímetro do pentágono A'B'C'D'E' = 67,5

Razão dos perímetros = $\frac{40,5}{67,5} = \frac{3}{5}$

4)

M x N; 7,5; 9; L z O — Q 8 R; y; 12; P 14 S

x = 6

y = 10

z = 10,5

Razão de semelhança = $\frac{3}{4}$

Perímetro do □LMNO = 33

Perímetro do □PQRS = 44

Razão dos perímetros = $\frac{33}{44} = \frac{3}{4}$

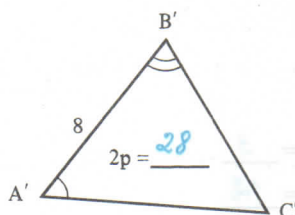
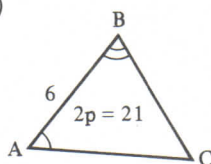
Com a resolução destes exercícios, você deve ter percebido a seguinte propriedade:

Para dois polígonos semelhantes, a razão dos perímetros equivale à razão de semelhança destes polígonos.

VAMOS TREINAR

Sem determinar as medidas dos lados dos polígonos semelhantes, descubra o perímetro que se pede (indicaremos perímetro por 2p):

1)

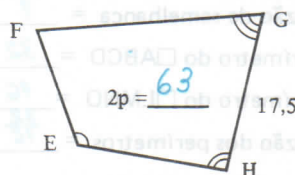
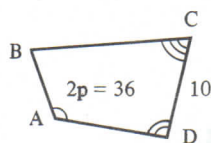
B; 6; 2p = 21; A C

Resolução:

$\frac{6}{8} = \frac{21}{x} \Longrightarrow 6x = 8 \cdot 21$

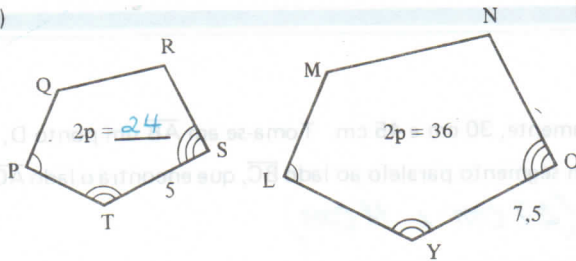
$x = \frac{8 \cdot 21}{6}$

$x = 28$

2)

B C; 2p = 36; 10; A D

Resolução: $\frac{10}{17,5} = \frac{36}{x} \Longrightarrow x = \frac{17,5 \cdot 36}{10}$

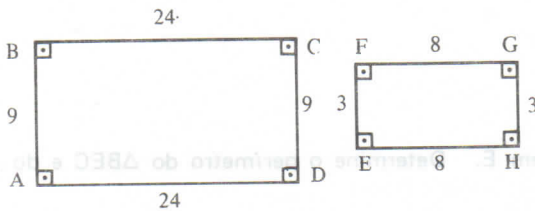
$x = 63$

3)

Resolução:

$\frac{5}{7,5} = \frac{x}{36} \Longrightarrow x = \frac{5 \cdot 36}{7,5}$

$x = 24$

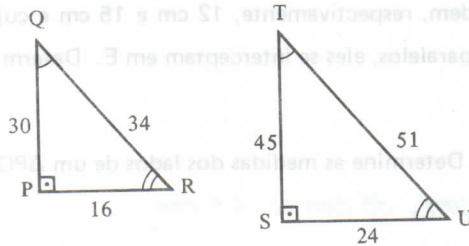
VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Verifique se os polígonos são semelhantes:

1)

R.: São semelhantes, pois os ângulos que se correspondem são congruentes e os lados são proporcionais.

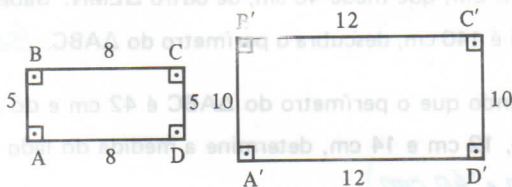
$\frac{9}{3} = \frac{24}{8} = \frac{9}{3} = \frac{24}{8} = \frac{3}{1}$

□ABCD ~ □EFGH

2)

R.: São semelhantes, pois os ângulos que se correspondem são congruentes e os lados são proporcionais.

$\frac{16}{24} = \frac{30}{45} = \frac{34}{51} = \frac{2}{3}$

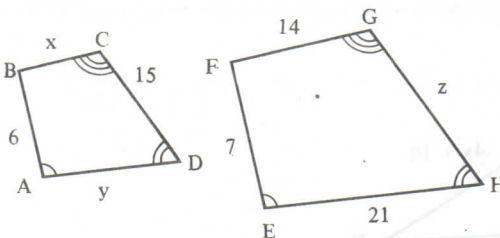
△PQR ~ △STU

3)

R.: Não são semelhantes, pois, apesar de os ângulos que se correspondem serem congruentes, os lados não são proporcionais.

$\frac{5}{10} = \frac{5}{10} \neq \frac{8}{12} = \frac{8}{12}$

□ABCD ≁ □A'B'C'D'

b) Dados os polígonos semelhantes, calcule o que se pede:

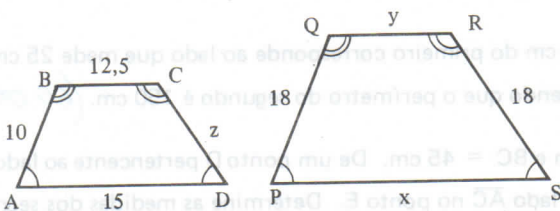
1)

Razão de semelhança = $\frac{6}{7}$

x = 12

y = 18

z = 17,5

Razão dos perímetros = $\frac{6}{7}$

2)

Razão de semelhança = $\frac{5}{9}$

x = 27

y = 22,5

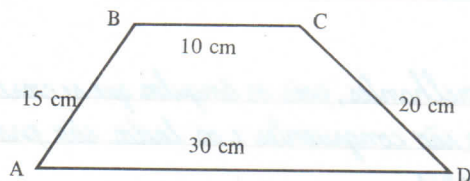
z = 10

Razão dos perímetros = $\frac{5}{9}$

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

Resolva:

1) Tem-se um ΔABC cujos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem, respectivamente, 30 cm e 45 cm. Toma-se em $\overline{AB}$ um ponto D, distante 12 cm do ponto B; a partir desse ponto D, traça-se um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto E. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EC}$. (27 cm e 18 cm)

2) Considere o trapézio ABCD:

Prolongando os lados não-paralelos, ocorre intersecção em E. Determine o perímetro do ΔBEC e do ΔAED. (27,5 cm e 82,5 cm)

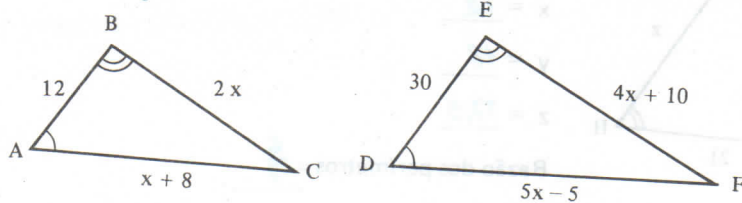
3) Tem-se um trapézio retângulo ABCD, cujas bases $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ medem, respectivamente, 12 cm e 15 cm e cujos lados não-paralelos medem 4 cm e 5 cm. Prolongando os lados não-paralelos, eles se interceptam em E. Determine o perímetro do ΔBEC e do ΔAED. (48 cm e 60 cm)

4) As medidas dos lados de um ΔABC são 10 cm, 14 cm e 18 cm. Determine as medidas dos lados de um ΔPQR semelhante ao ΔABC, sabendo que o seu perímetro é 105 cm. (25 cm, 35 cm e 45 cm)

5) O lado $\overline{AB}$ de um ΔABC mede 15 cm e corresponde ao lado $\overline{LM}$, que mede 40 cm, de outro ΔLMN. Sabendo que estes triângulos são semelhantes e que o perímetro do ΔLMN é 140 cm, descubra o perímetro do ΔABC. (52,5 cm)

6) Tem-se dois triângulos semelhantes: ΔABC e ΔPQR. Sabendo que o perímetro do ΔABC é 42 cm e do ΔPQR é 105 cm e que os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem, respectivamente, 12 cm e 14 cm, determine a medida do lado $\overline{AC}$ e as medidas dos lados do ΔPQR. (16 cm, 30 cm, 35 cm e 40 cm)

7) Os lados de um quadrilátero medem 15 cm, 20 cm, 25 cm e 30 cm. Determine as medidas dos lados de um segundo quadrilátero semelhante ao primeiro e cujo perímetro é 360 cm. (60 cm, 80 cm, 100 cm e 120 cm)

8) De acordo com a figura:

Determine o perímetro do ΔABC e do ΔDEF. (50 e 125)

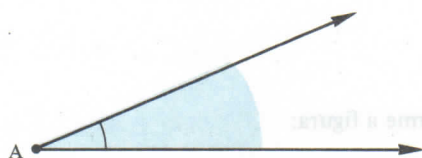
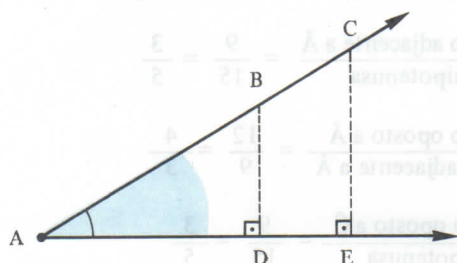
9) Tem-se dois pentágonos semelhantes. O lado que mede 10 cm do primeiro corresponde ao lado que mede 25 cm do segundo. Descubra o perímetro do primeiro pentágono, sabendo que o perímetro do segundo é 150 cm. (60 cm)

10) Tem-se um ΔABC que apresenta AB = 33 cm, AC = 30 cm e BC = 45 cm. De um ponto D pertencente ao lado $\overline{AB}$ traça-se um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$ e que encontra o lado $\overline{AC}$ no ponto E. Determine as medidas dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$, sabendo que a medida do segmento $\overline{DE}$ é 15 cm. (11 cm e 10 cm)

Unidade 12

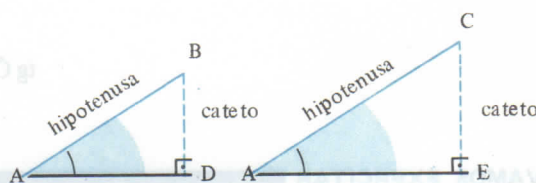
TRIGONOMETRIA

NOÇÃO DE SENO, CO-SENO E TANGENTE

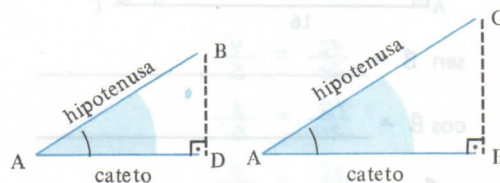
Considere um ângulo:

Indiquemos, num dos lados desse ângulo, os pontos B e C; agora, a partir desses pontos, tracemos perpendiculares ao outro lado do ângulo.

Perceba que os triângulos ABD e ACE são retângulos e semelhantes (caso: A.A.).

$\Delta ABD \sim \Delta ACE$

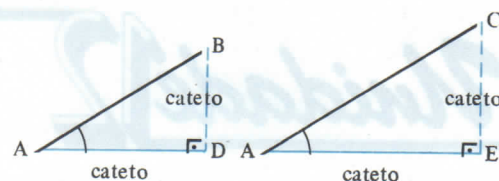
Pois bem, sendo estes triângulos semelhantes, podemos escrever as proporções:

Razões entre a medida do cateto oposto ao ângulo considerado e a medida da hipotenusa.
Tais razões recebem o nome de **seno** do ângulo considerado.

Indicação:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{BD}{AB} = \frac{CE}{AC}$$

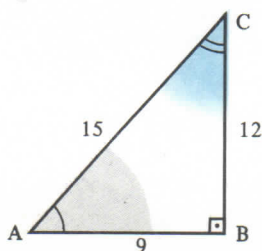
Razões entre a medida do cateto adjacente ao ângulo considerado e a medida da hipotenusa. Tais razões recebem o nome de **co-seno** do ângulo considerado.

Indicação:

$$\cos \hat{A} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Razões entre a medida do cateto oposto e a do cateto adjacente ao ângulo considerado.
Tais razões recebem o nome de **tangente** do ângulo considerado.

Indicação:

$$\text{tg } \hat{A} = \frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$$

Vejamos um exemplo:

Vamos determinar o seno, o co-seno e a tangente dos ângulos Â e Ĉ, conforme a figura:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{A}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{A}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

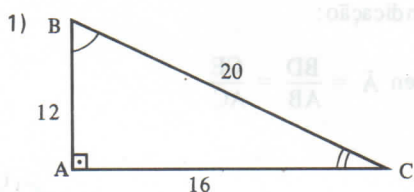
$$\text{tg } \hat{A} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{A}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{A}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg } \hat{C} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \hat{C}}{\text{medida do cateto adjacente a } \hat{C}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

VAMOS EXERCITAR

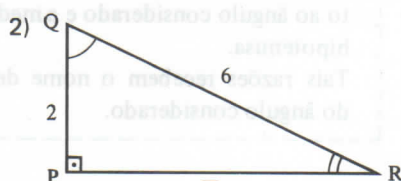
Complete adequadamente, conforme a figura:

sen B̂ = $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

cos B̂ = $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

tg B̂ = $\frac{16}{12} = \frac{4}{3}$

sen Ĉ = $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

cos Ĉ = $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

tg Ĉ = $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

sen Q̂ = $\frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

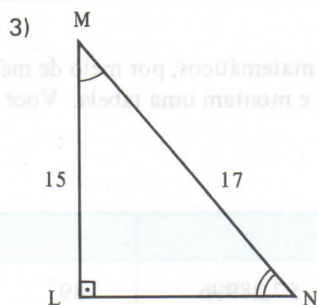
cos Q̂ = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

tg Q̂ = $\frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

sen R̂ = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

cos R̂ = $\frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

tg R̂ = $\frac{2}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

3)

$\text{sen } \hat{M} = \frac{8}{17}$

$\cos \hat{M} = \frac{15}{17}$

$\text{tg } \hat{M} = \frac{8}{15}$

$\text{sen } \hat{N} = \frac{15}{17}$

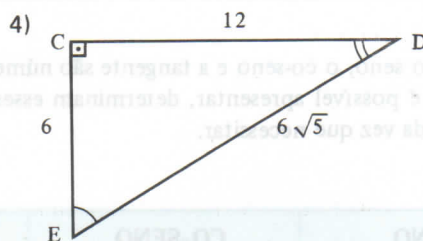
$\cos \hat{N} = \frac{8}{17}$

$\text{tg } \hat{N} = \frac{15}{8}$

4)

C 12 D

6 $6\sqrt{5}$

E

$\text{sen } \hat{E} = \frac{12}{6\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos \hat{E} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

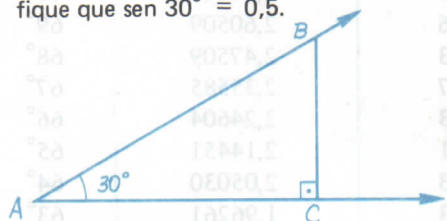
$\text{tg } \hat{E} = \frac{12}{6} = 2$

$\text{sen } \hat{D} = \frac{6}{6\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

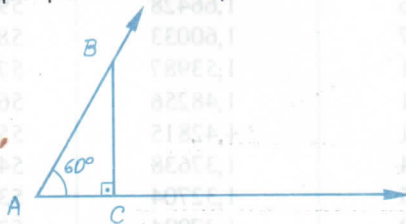
$\cos \hat{D} = \frac{12}{6\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } \hat{D} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

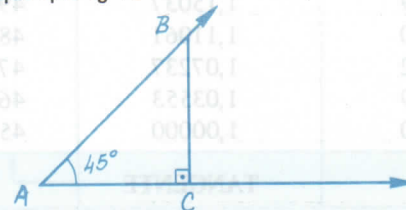
DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

1) Construa um ângulo de 30°, com auxílio de um transferidor. Localize um ponto B num dos lados e, a partir de B, trace um segmento perpendicular ao outro lado. Agora, com auxílio de uma régua ou de um compasso, verifique que sen 30° = 0,5.

$\text{sen } 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{2BC} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Com auxílio do compasso com abertura BC, verifica-se que AB = 2 BC, ou, então, mede-se estes segmentos com auxílio de uma régua.

2) Construa um ângulo de 60°, com auxílio de um transferidor. Localize um ponto B num dos lados e, a partir de B, trace um segmento perpendicular ao outro lado. Agora, com auxílio de uma régua ou de um compasso, verifique que cos 60° = 0,5.

$\cos 60° = \frac{AC}{AB} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Com auxílio do compasso com abertura AC, verifica-se que AB = 2 AC.

3) Construa um ângulo de 45°, com auxílio de um transferidor. Localize um ponto B num dos lados e, a partir de B, trace um segmento perpendicular ao outro lado. Agora, com auxílio de uma régua ou de um compasso, verifique que tg 45° = 1.

$\text{tg } 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{BC} = 1$

Com auxílio do compasso com abertura AC, verifica-se que AC = BC.

AS TABELAS

Para cada ângulo, o seno, o co-seno e a tangente são números invariáveis. Então os matemáticos, por meio de métodos que agora não nos é possível apresentar, determinam esses valores para cada ângulo e montam uma tabela. Você irá consultar essa tabela toda vez que necessitar.

Veja:

↓	SENO	CO-SENO	TANGENTE		
1°	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89°
2°	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88°
3°	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87°
4°	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86°
5°	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85°
6°	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84°
7°	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83°
8°	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82°
9°	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81°
10°	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80°
11°	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79°
12°	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78°
13°	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77°
14°	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76°
15°	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75°
16°	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74°
17°	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73°
18°	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72°
19°	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71°
20°	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70°
21°	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69°
22°	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68°
23°	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67°
24°	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66°
25°	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65°
26°	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64°
27°	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63°
28°	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62°
29°	0,48481	0,87462	0,55431	1,80405	61°
30°	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60°
31°	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59°
32°	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58°
33°	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57°
34°	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56°
35°	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55°
36°	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54°
37°	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53°
38°	0,61566	0,78801	0,78129	1,27994	52°
39°	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51°
40°	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50°
41°	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49°
42°	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48°
43°	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47°
44°	0,69466	0,71934	0,96569	1,03553	46°
45°	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45°
	CO-SENO	SENO		TANGENTE	↑

Exemplos:

1) Dê o seno, o co-seno e a tangente do ângulo cuja medida é 32°:

Resolução:

Basta consultar a tabela e procurar 32° na primeira coluna. Você encontrará:

sen 32° = 0,52992; cos 32° = 0,84805 e tg 32° = 0,62487

2) Dê o seno, o co-seno e a tangente do ângulo cuja medida é 78°:

Resolução:

Procure 78° na última coluna da tabela. Você encontrará:

sen 78° = 0,97815; cos 78° = 0,20791 e tg 78° = 4,70463

3) Descubra a medida do ângulo cujo seno é igual a 0,64279:

Resolução:

Basta procurar o número 0,64279 na coluna dos senos e verificar a medida correspondente. Você terá:

sen [?] = 0,64279

[?] = 40°

VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente:

1) sen 18° = 0,30902
2) sen 25° = 0,42262
3) sen 30° = 0,50000
4) sen 63° = 0,89101
5) sen 81° = 0,98769

6) cos 15° = 0,96593
7) cos 29° = 0,87462
8) cos 41° = 0,75471
9) cos 58° = 0,52992
10) cos 84° = 0,10453

11) tg 9° = 0,15838
12) tg 20° = 0,36397
13) tg 36° = 0,72654
14) tg 49° = 1,15037
15) tg 88° = 28,63625

b) Descubra a medida representada por **x**:

1) sen x = 0,06976 ⇒ x = 4°
2) sen x = 0,62932 ⇒ x = 39°
3) sen x = 0,22495 ⇒ x = 13°
4) sen x = 0,97437 ⇒ x = 77°
5) sen x = 0,86603 ⇒ x = 60°
6) cos x = 0,92050 ⇒ x = 23°
7) cos x = 0,82904 ⇒ x = 34°
8) cos x = 0,06976 ⇒ x = 86°

9) cos x = 0,40674 ⇒ x = 66°
10) cos x = 0,70711 ⇒ x = 45°
11) tg x = 1,00000 ⇒ x = 45°
12) tg x = 0,28675 ⇒ x = 16°
13) tg x = 0,64941 ⇒ x = 33°
14) tg x = 4,01078 ⇒ x = 76°
15) tg x = 2,14451 ⇒ x = 65°

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete adequadamente:

1)

$\frac{BC}{AB}$ = sen $\hat{A}$ ou cos $\hat{B}$

$\frac{AC}{AB}$ = cos $\hat{A}$ ou sen $\hat{B}$

$\frac{BC}{AC}$ = tg $\hat{A}$

$\frac{AC}{BC}$ = tg $\hat{B}$

2)

sen 60° = $\frac{QR}{PQ}$

cos 30° = $\frac{QR}{PQ}$

tg 60° = $\frac{QR}{PR}$

3)

sen $\hat{B}$ = $\frac{15}{39} = \frac{5}{13}$ sen $\hat{C}$ = $\frac{36}{39} = \frac{12}{13}$

cos $\hat{B}$ = $\frac{36}{39} = \frac{12}{13}$ cos $\hat{C}$ = $\frac{15}{39} = \frac{5}{13}$

tg $\hat{B}$ = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ tg $\hat{C}$ = $\frac{36}{15} = \frac{12}{5}$

4)

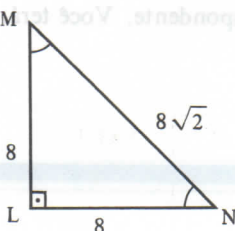
sen $\hat{M}$ = $\frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ sen $\hat{N}$ = $\frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

cos $\hat{M}$ = $\frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cos $\hat{N}$ = $\frac{8}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

tg $\hat{M}$ = $\frac{8}{8} = 1$ tg $\hat{N}$ = $\frac{8}{8} = 1$

5)

sen $\hat{C}$ = $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ sen $\hat{B}$ = $\frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

cos $\hat{C}$ = $\frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cos $\hat{B}$ = $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

tg $\hat{C}$ = $\frac{8}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ tg $\hat{B}$ = $\frac{8\sqrt{3}}{8} = \sqrt{3}$

b) Consultando a tabela, descubra:

1) sen 28° = 0,46947

2) cos 37° = 0,79864

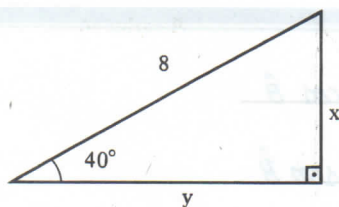
3) tg 63° = 1,96261

4) sen x = 0,37461 ⇒ x = 22°

5) cos x = 0,99619 ⇒ x = 5°

6) tg x = 14,30067 ⇒ x = 86°

A UTILIZAÇÃO DA TABELA

Observe a figura:

Você descobrirá os valores indicados por x e y fazendo:

sen 40° = $\frac{x}{8}$; consultando a tabela, encontra-se: sen 40° = 0,64279.

Então: sen 40° $= \frac{x}{8}$

$0{,}64279 = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 8 \cdot 0{,}64279$

$x = 5{,}14232$

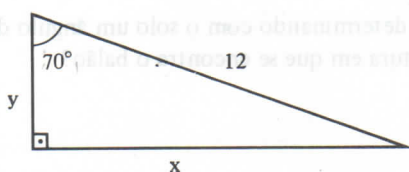
cos 40° $= \frac{y}{8}$; consultando a tabela, encontra-se: cos 40° = 0,76604.

Então: cos 40° $= \frac{y}{8}$

$0{,}76604 = \frac{y}{8} \Rightarrow y = 8 \cdot 0{,}76604$

$y = 6{,}12832$

AGORA FAÇA VOCÊ:

Determine **x** e **y**, conforme a figura:

1)

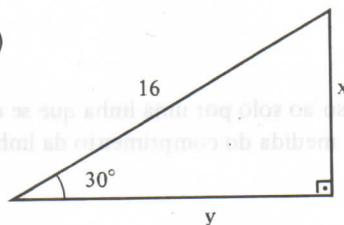
Resolução:

x = 11,27628

y = 4,10424

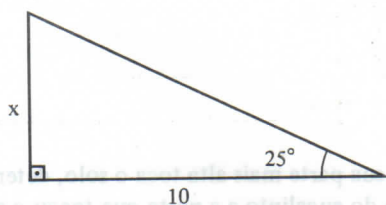
2)

Resolução:

sen 30° = x/16

0,5 = x/16 ⇒ x = 8

cos 30° = y/16

0,86603 = y/16

y = 13,85648

x = 8

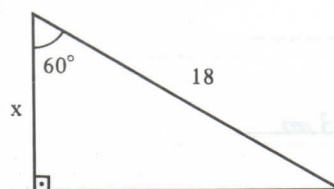
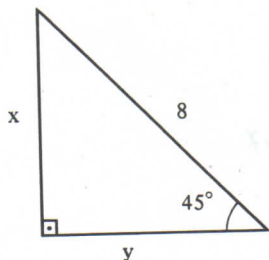
y = 13,85648

3)

Resolução:

tg 25° = x/10

0,46631 = x/10

x = 4,6631

x = 4,6631

4)

Resolução:

cos 60° = x/18

0,5 = x/18 ⇒ x = 9

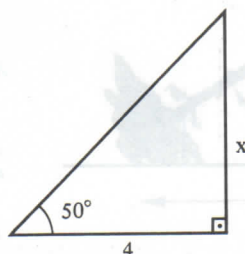
x = 9

5)

Resolução:

x = 5,65688

y = 5,65688

6)

Resolução:

tg 50° = x/4

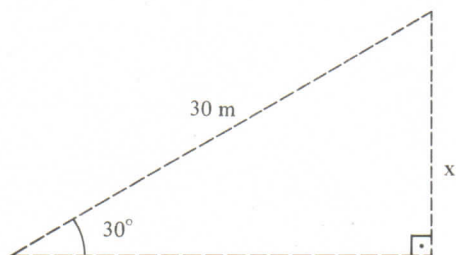
1,19175 = x/4

x = 4,767

x = 4,767

Observe agora este problema:

Um menino está empinando papagaio. Sabemos que a linha mede 30 m e está bem esticada, determinando com o solo um ângulo de 30°. A que altura se encontra o papagaio?

Resolução:

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{30}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{30} \Rightarrow 2x = 30$$

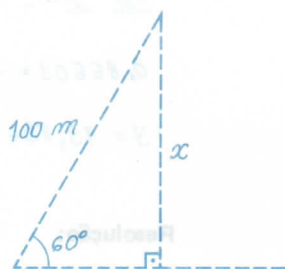
$$x = \frac{30}{2} = 15$$

Resposta: 15 m.

Agora é a sua vez.

Resolva:

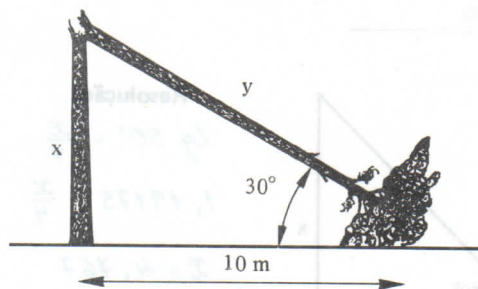
1) Um balão está preso ao solo por uma linha que se encontra bem esticada, determinando com o solo um ângulo de 60°. Sabe-se que a medida do comprimento da linha é 100 m. Qual é a altura em que se encontra o balão?

Resolução:

$$\text{sen } 60° = \frac{x}{100}$$

$$0{,}86603 = \frac{x}{100} \Longrightarrow x = 100 \cdot 0{,}86603$$

$$x = 86{,}603$$

Resposta: 86,603 m.

2) Devido a um temporal, um pé de eucalipto é quebrado de tal modo que a sua parte mais alta toca o solo, determinando com este um ângulo de 30°. Sabe-se que a distância entre o tronco do eucalipto e a parte que tocou o solo é de 10 m. Qual era a altura desse eucalipto?

$$\text{tg } 30° = \frac{x}{10}$$

$$0{,}57735 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 5{,}7735$$

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{y}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5{,}7735}{y} \Longrightarrow y = 11{,}547$$

Então: 5,7735 + 11,547 = 17,3205

Resposta: 17,3205 m.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Descubra as medidas dos catetos indicados por **x** e/ou **y**:

1)

x = 1,2941

2)

x = 5,8508

y = 5,456

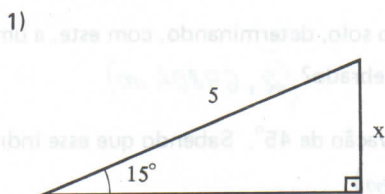
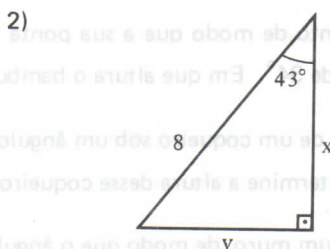
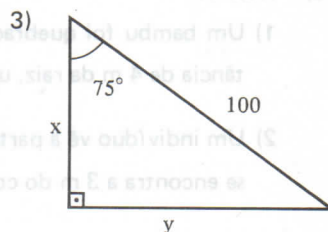
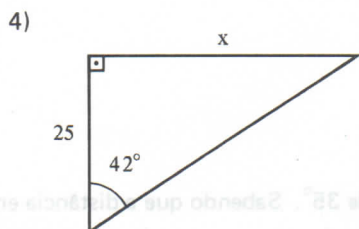
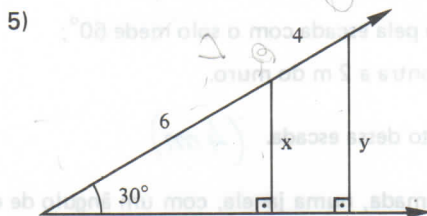
3)

x = 25,882

y = 96,593

4)

x = 13,51

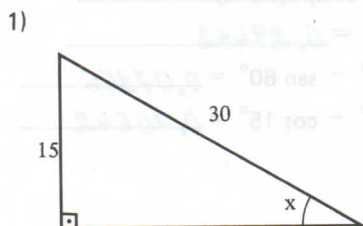
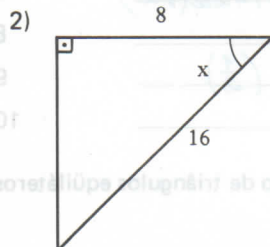
5)

x = 3

y = 5

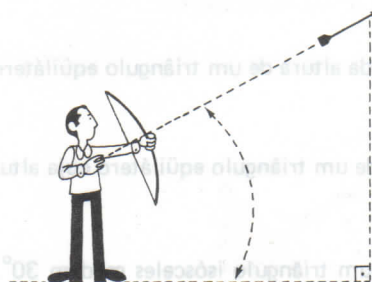
b) Descubra a medida do ângulo representado por **x**:

1)

x = 30°

2)

x = 60°

c) Resolva:

1) Um arqueiro lança uma flecha, a qual, depois de percorrer 50 m, encontra-se a uma altura de 25 m. Qual a medida do ângulo de elevação com que esse arqueiro lançou a flecha?

Resposta: 30°

2) Uma pessoa se encontra a 40 m de um helicóptero parado. Se este helicóptero se elevar verticalmente:

- a que altura o helicóptero se encontrará quando a pessoa o vir sob um ângulo de elevação de 45°? (40 m)
- a que distância o helicóptero estará dessa pessoa quando ela o vir sob um ângulo de elevação de 60°? (80 m)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva:

1) Um bambu foi quebrado pelo vento de modo que a sua ponta tocou o solo, determinando, com este, a uma distância de 4 m da raiz, um ângulo de 34°. Em que altura o bambu foi quebrado? (2,69804 m)

2) Um indivíduo vê a parte mais alta de um coqueiro sob um ângulo de elevação de 45°. Sabendo que esse indivíduo se encontra a 3 m do coqueiro, determine a altura desse coqueiro. (3 m)

3) Uma escada de 2 m é encostada num muro, de modo que o ângulo determinado pela escada com o solo mede 30°. Determine a que altura a escada se apóia no muro. (1 m)

4) Uma escada é encostada num muro, de tal modo que:

- o ângulo determinado pela escada com o solo mede 60°;
- o pé da escada se encontra a 2 m do muro.

Determine o comprimento dessa escada. (4 m)

5) Um seresteiro vê a sua amada, numa janela, com um ângulo de elevação de 35°. Sabendo que a distância entre o seresteiro e sua amada é de 3 m, determine a altura em que ela se encontra. (1,72074 m)

b) Determine o valor equivalente a:

1) sen 30° + cos 60° = 1
2) sen 45° + cos 45° = 1,41422 ($\sqrt{2}$)
3) sen 30° + tg 45° = 1,5
4) tg 45° − cos 60° = 0,5 ($\frac{1}{2}$)
5) sen 32° − cos 58° = 0
6) cos 20° + sen 50° = 1,70573
7) tg 60° − tg 30° = 1,15470
8) cos 48° − sen 22° = 0,29452
9) sen 10° + sen 50° − sen 60° = 0,07366
10) cos 25° + cos 40° − cos 15° = 0,70642

c) Resolva os problemas a respeito de triângulos eqüiláteros e isósceles:

1) A medida do comprimento do lado de um triângulo eqüilátero é 6 m. Determine a medida do comprimento da sua altura. (5,19618 m)

2) Descubra a medida da altura de um triângulo eqüilátero cujo lado mede 20 m. (17,3206 m)

3) Sabendo que a medida da altura de um triângulo eqüilátero é 10 m, determine o perímetro desse triângulo. (34,641 m)

4) Descubra o perímetro de um triângulo eqüilátero cuja altura mede 4 m. (13,8564 m)

5) Os ângulos da base de um triângulo isósceles medem 30°. Determine a medida dos lados congruentes, sabendo que a altura em relação à base (lado desigual) mede 10 m. (20 m)

6) A medida dos lados congruentes de um triângulo isósceles é 16 m. Sabendo que o ângulo do vértice mede 100°, determine a altura em relação à base (lado desigual). (10,28464 m)

O ESTUDO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

NOÇÃO DE PROJEÇÃO ORTOGONAL

Considere uma reta **r** e um ponto A não pertencente a **r**.

Agora trace uma reta **r'** passando por A e perpendicular a **r**.

A intersecção das duas retas determina o ponto A'. Este ponto constitui a **projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.**

Indicação: $\boxed{proj_r^A = A'}$ lê-se: projeção de A sobre r é igual a A'.

Então, projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta é o ponto determinado pela intersecção de uma reta perpendicular à reta dada e passando pelo ponto em questão.

Agora considere uma reta **r** e um segmento $\overline{AB}$.

Se você determinar em **r** as projeções dos pontos A e B, ou seja, dos pontos extremos do segmento $\overline{AB}$, obterá os pontos A' e B'.

Pois bem, o segmento $\overline{A'B'}$ constitui a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta **r**.

Indicação: $\boxed{proj_r^{\overline{AB}} = \overline{A'B'}}$ lê-se: projeção de $\overline{AB}$ sobre r é igual a $\overline{A'B'}$.

VAMOS TREINAR

Projete ortogonalmente sobre **r** os pontos e os segmentos:

O ESTUDO DO TRIÂNGULO RETÂNGULO

NOÇÃO DE PROJEÇÃO ORTOGONAL

Considere uma reta **r** e um ponto A não pertencente a **r**.

Agora trace uma reta r′ passando por A e perpendicular a **r**.

A intersecção das duas retas determina o ponto A′. Este ponto constitui a **projeção ortogonal do ponto A sobre a reta r.**

Indicação: $\boxed{proj_r^A = A'}$ lê-se: projeção de A sobre r é igual a A′.

Então, projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta é o ponto determinado pela intersecção de uma reta perpendicular à reta dada e passando pelo ponto em questão.

Agora considere uma reta **r** e um segmento $\overline{AB}$.

Se você determinar em **r** as projeções dos pontos A e B, ou seja, dos pontos extremos do segmento $\overline{AB}$, obterá os pontos A′ e B′.

Pois bem, o segmento $\overline{A'B'}$ constitui a projeção ortogonal do segmento $\overline{AB}$ sobre a reta **r**.

Indicação: $\boxed{proj_r^{\overline{AB}} = \overline{A'B'}}$ lê-se: projeção de $\overline{AB}$ sobre r é igual a $\overline{A'B'}$.

VAMOS TREINAR

Projete ortogonalmente sobre **r** os pontos e os segmentos:

1) P, r

$proj_r^P =$ P′

2) Q, r

$proj_r^Q =$ Q′

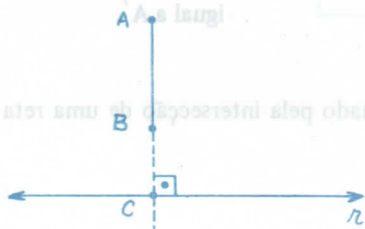
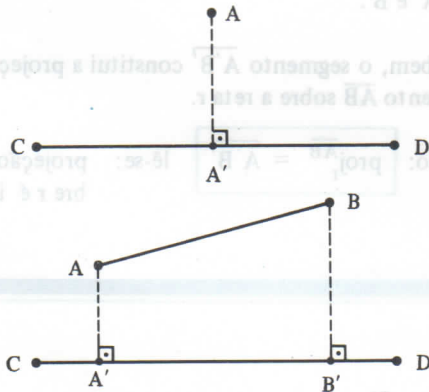
3) S, r

$proj_r^S =$ S′

4)

$proj_r^{\overline{MN}} =$ $\overline{M'N'}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

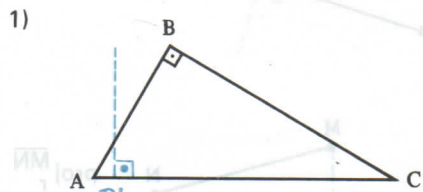
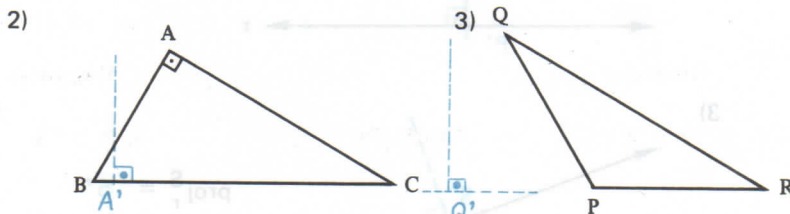
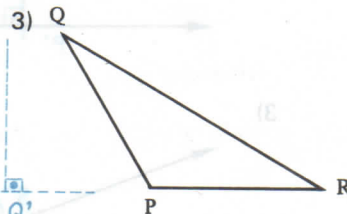
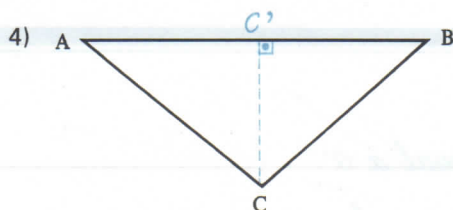
Trace um segmento $\overline{AB}$ e uma reta r, de modo que a projeção do segmento $\overline{AB}$ sobre r seja um ponto.

A projeção ortogonal de um ponto ou de um segmento pode ser feita sobre um outro segmento.
Veja:

A′ é a projeção do ponto A sobre o segmento $\overline{AB}$.

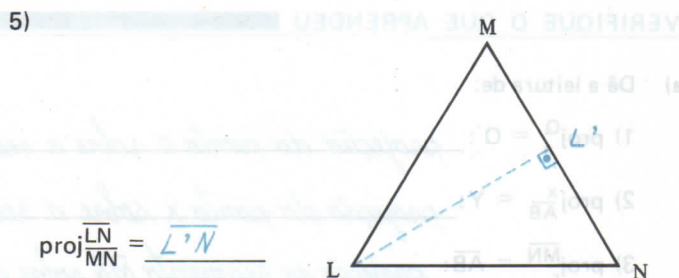
$$\text{proj}_{\overline{AB}}\, A = A'$$

$\overline{A'B'}$ é a projeção do segmento $\overline{AB}$ sobre o segmento $\overline{CD}$.

$$\text{proj}_{\overline{CD}}\, \overline{AB} = \overline{A'B'}$$

VAMOS EXERCITAR

Dados os triângulos, complete o que se pede:

$proj_{\overline{AB}}^{\overline{AC}} = \overline{AC'}$

$proj_{\overline{AB}}^{\overline{BC}} = \overline{BC'}$

$proj_{\overline{MN}}^{\overline{LN}} = \overline{L'N}$

$proj_{\overline{MN}}^{\overline{LM}} = \overline{L'M}$

NOÇÃO DE MÉDIA PROPORCIONAL

Dados dois números **a** e **b**, entende-se por média proporcional de **a** e **b** o número **m** que, juntamente com **a** e **b**, constitui a seguinte proporção:

$$\frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$

$m \cdot m = a \cdot b$

$m^2 = a \cdot b$

$m = \sqrt{a \cdot b}$

Veja um exemplo:

Achar a média proporcional dos números 2 e 8:

Resolução:

$\frac{2}{m} = \frac{m}{8}$; desta proporção vem que: $m \cdot m = 2 \cdot 8$

$m^2 = 16$

$m = \sqrt{16} = 4$

Resposta: A média proporcional de 2 e 8 é 4.

AGORA FAÇA VOCÊ

Dexcubra a média proporcional dos números:

1) 4 e 9

Resolução:

$\frac{4}{m} = \frac{m}{9}$

$m^2 = 36$

$m = \sqrt{36} = 6$

Resposta: 6

2) 16 e 4

Resolução:

$\frac{16}{m} = \frac{m}{4}$

$m^2 = 64$

$m = \sqrt{64} = 8$

Resposta: 8

3) 50 e 2

Resolução:

$\frac{50}{m} = \frac{m}{2}$

$m^2 = 100$

$m = \sqrt{100} = 10$

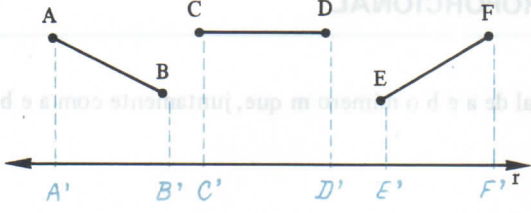
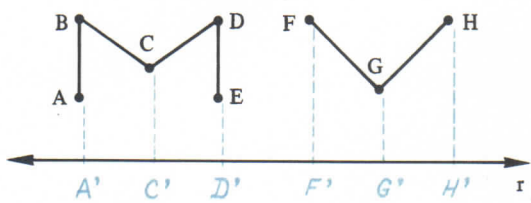
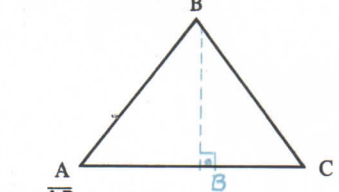
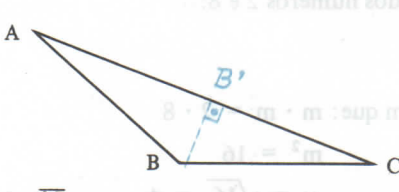
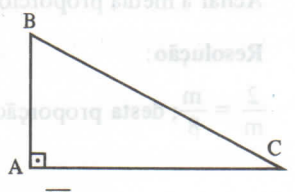
Resposta: 10

4) 8 e 18

Resolução:

$\frac{8}{m} = \frac{m}{18}$

$m^2 = 144$

$m = \sqrt{144} = 12$

Resposta: 12

a) Dê a leitura de:

1) $proj_a^Q = Q'$: *projeção do ponto Q sobre a reta a é igual a Q'.*

2) $proj_{\overleftrightarrow{AB}}^x = Y$: *projeção do ponto x sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ é igual a Y.*

3) $proj_r^{\overline{MN}} = \overline{AB}$: *projeção do segmento $\overline{MN}$ sobre a reta r é igual ao segmento $\overline{AB}$.*

4) $proj_{\overline{BC}}^{\overline{PQ}} = \overline{AB}$: *projeção do segmento $\overline{PQ}$ sobre o segmento $\overline{BC}$ é igual ao segmento $\overline{AB}$.*

b) Projete ortogonalmente os segmentos sobre a reta r e complete:

1)

$proj_r^{\overline{AB}} = \overline{A'B'}$; $proj_r^{\overline{CD}} = \overline{C'D'}$ e $proj_r^{\overline{EF}} = \overline{E'F'}$

2)

B D F H C G A E A' C' D' F' G' H' r

$proj_r^{\overline{AB}} = A'$	$proj_r^{\overline{DE}} = D'$
$proj_r^{\overline{BC}} = \overline{A'C'}$	$proj_r^{\overline{FG}} = \overline{F'G'}$
$proj_r^{\overline{CD}} = \overline{C'D'}$	$proj_r^{\overline{GH}} = \overline{G'H'}$

c) Projete os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ sobre o lado $\overline{AC}$, nos triângulos:

1)

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{AB}} = \overline{AB'}$

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{BC}} = \overline{B'C}$

2)

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{AB}} = \overline{AB'}$

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{BC}} = \overline{B'C}$

3)

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{AB}} = A$

$proj_{\overline{AC}}^{\overline{BC}} = \overline{AC}$

d) Determine a média proporcional dos números:

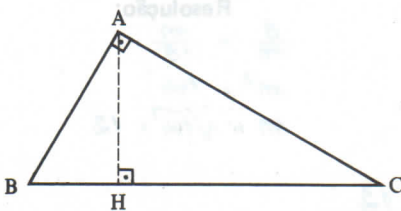
1) 25 e 16 — média = 20

2) 48 e 27 — média = 36

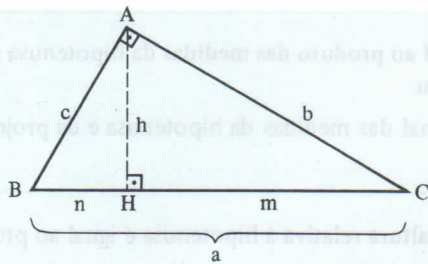
3) 75 e 48 — média = 60

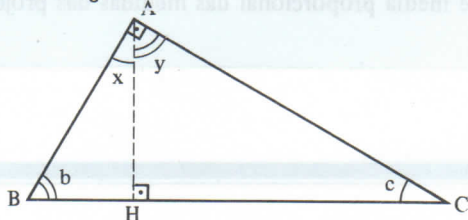
4) 27 e 75 — média = 45

AS PROJEÇÕES DOS CATETOS SOBRE A HIPOTENUSA NUM TRIÂNGULO RETÂNGULO

Observe a figura:

Note que:

- ΔABC é retângulo, pois $\hat{A}$ é reto.
- $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são os catetos, e $\overline{BC}$ é a hipotenusa do ΔABC.
- $\overline{AH}$ é a altura do ΔABC, relativa à hipotenusa $\overline{BC}$.
- $\overline{BH}$ é a projeção do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.
- $\overline{HC}$ é a projeção do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa $\overline{BC}$.

Vamos indicar por meio de letras minúsculas as medidas dos segmentos no $\triangle ABC$.

a = medida da hipotenusa $\overline{BC}$
b = medida do cateto $\overline{AC}$
c = medida do cateto $\overline{AB}$
h = medida da altura $\overline{AH}$
m = medida da projeção $\overline{HC}$
n = medida da projeção $\overline{BH}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Dada a figura:

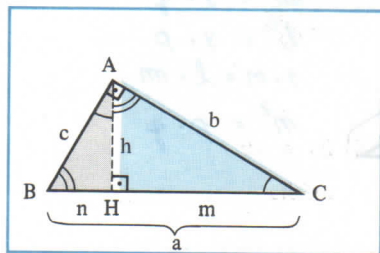
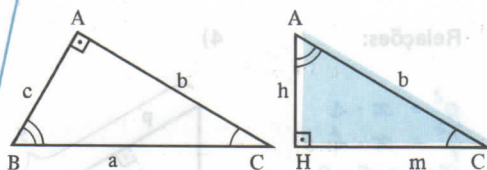
Prove que:

$x = c$ e $y = b$

$$\left.\begin{aligned} x + b &= 90^\circ \\ b + c &= 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow x + b = b + c \qquad x = c$$

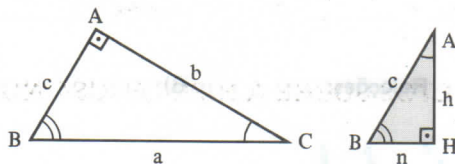
$$\left.\begin{aligned} y + c &= 90^\circ \\ b + c &= 90^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow y + c = b + c \qquad y = b$$

RELAÇÕES MÉTRICAS

Entre as medidas dos lados, das projeções dos catetos sobre a hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa num triângulo retângulo, existem as seguintes relações:

$\triangle ABC \sim \triangle HAC$

Então:

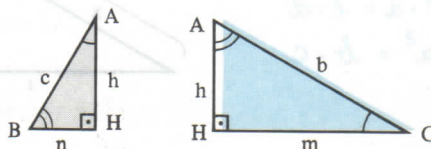
$\frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$

$\frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$

$\triangle ABC \sim \triangle HBA$

Então:

$\frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$

$\frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$

$\triangle HAC \sim \triangle HBA$

Então:

$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n$

Conclusão:

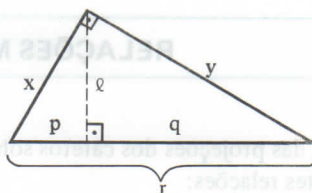
$b^2 = a \cdot m$ $c^2 = a \cdot n$	O quadrado da medida de um cateto é igual ao produto das medidas da hipotenusa e da projeção deste cateto sobre a hipotenusa. Ou: A medida de um cateto é média proporcional das medidas da hipotenusa e da projeção deste cateto sobre a hipotenusa.
$a \cdot h = b \cdot c$	O produto das medidas da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas dos catetos.
$h^2 = m \cdot n$	O quadrado da medida da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Ou: A medida da altura relativa à hipotenusa é média proporcional das medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

VAMOS EXERCITAR

Estabeleça as quatro relações conforme a figura:

1)

Relações:

$a^2 = e \cdot c$
$b^2 = e \cdot d$
$e \cdot f = a \cdot b$
$f^2 = c \cdot d$

2)

Relações:

$x^2 = r \cdot p$
$y^2 = r \cdot q$
$r \cdot \ell = x \cdot y$
$\ell^2 = p \cdot q$

3)

Relações:

$p^2 = x \cdot s$
$q^2 = x \cdot t$
$x \cdot r = p \cdot q$
$r^2 = s \cdot t$

4)

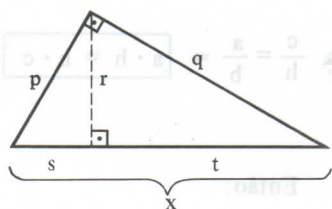
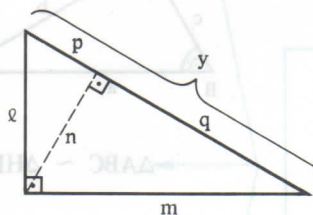
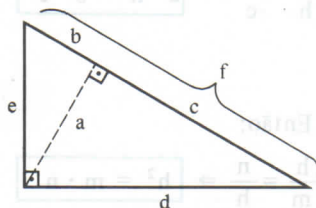
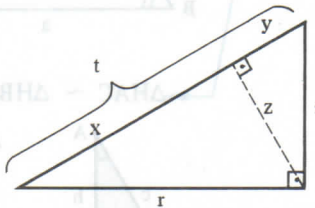
Relações:

$m^2 = y \cdot q$
$\ell^2 = y \cdot p$
$y \cdot m = \ell \cdot m$
$n^2 = p \cdot q$

5)

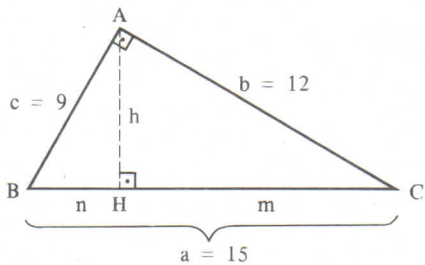
Relações:

$e^2 = f \cdot b$
$d^2 = f \cdot c$
$f \cdot a = e \cdot d$
$a^2 = b \cdot c$

6)

Relações:

$s^2 = t \cdot y$
$r^2 = t \cdot x$
$t \cdot z = r \cdot s$
$z^2 = x \cdot y$

Agora que você exercitou o estabelecimento das relações, vamos aplicá-los na determinação numérica.

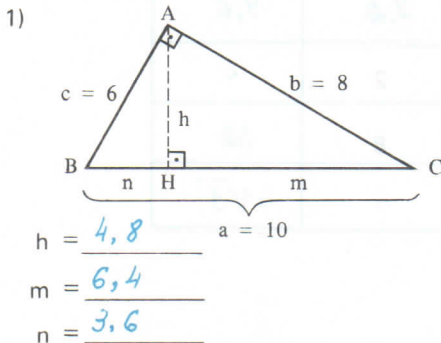
Exemplo: Dada a figura, descubra as medidas desconhecidas:

$a \cdot h = b \cdot c$
$15 \cdot h = 12 \cdot 9$
$15h = 108$
$h = \frac{108}{15} = 7{,}2$

$b^2 = a \cdot m$
$12^2 = 15 \cdot m$
$144 = 15 \cdot m$
$m = \frac{144}{15} = 9{,}6$

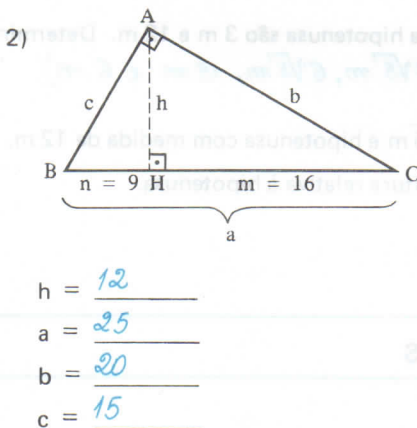
$c^2 = a \cdot n$
$9^2 = 15 \cdot n$
$81 = 15 \cdot n$
$n = \frac{81}{15} = 5{,}4$

VAMOS EXERCITAR

Determine as medidas desconhecidas de acordo com a figura:

1) (c = 6, b = 8, a = 10)

Resolução:

$a \cdot h = b \cdot c$
$10 \cdot h = 8 \cdot 6$
$10h = 48$
$h = \frac{48}{10} = 4{,}8$

$b^2 = a \cdot m$
$8^2 = 10 \cdot m$
$64 = 10 \cdot m$
$m = \frac{64}{10} = 6{,}4$

$c^2 = a \cdot m$
$6^2 = 10 \cdot m$
$36 = 10 \cdot m$
$m = \frac{36}{10} = 3{,}6$

h = 4,8
m = 6,4
n = 3,6

2) (n = 9, m = 16)

Resolução:

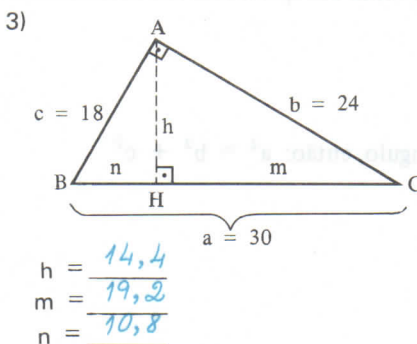
$h^2 = m \cdot m$
$h^2 = 16 \cdot 9$
$h^2 = 144$
$h = \sqrt{144} = 12$

$a = m + m$
$a = 16 + 9$
$a = 25$

$b^2 = a \cdot m$
$b^2 = 25 \cdot 16$
$b^2 = 400$
$b = \sqrt{400} = 20$

$a \cdot h = bc$
$25 \cdot 12 = 20 \cdot c$
$300 = 20 \cdot c$
$c = \frac{300}{20} = 15$

h = 12
a = 25
b = 20
c = 15

3) (c = 18, b = 24, a = 30)

Resolução:

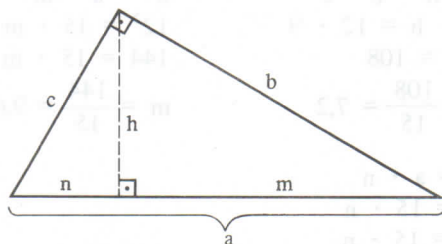
$a \cdot h = b \cdot c$
$30 \cdot h = 24 \cdot 18$
$30h = 432$
$h = \frac{432}{30} = 14{,}4$

$b^2 = a \cdot m$
$24^2 = 30 \cdot m$
$576 = 30m$
$m = \frac{576}{30} = 19{,}2$

$c^2 = a \cdot m$
$18^2 = 30 \cdot m$
$324 = 30m$
$m = \frac{324}{30} = 10{,}8$

h = 14,4
m = 19,2
n = 10,8

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete a tabela conforme a figura:

a	b	c	m	n	h
5	4	3	3,2	1,8	2,4
20	16	12	12,8	7,2	9,6
10	$4\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$	8	2	4
26	$6\sqrt{13}$	$4\sqrt{13}$	18	8	12
16	$8\sqrt{3}$	8	12	4	$4\sqrt{3}$

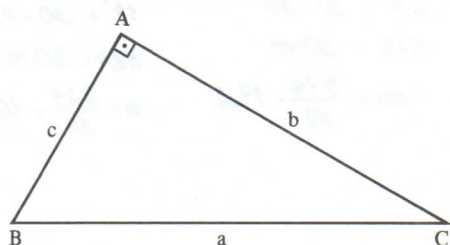
b) Resolva:

1) Num triângulo retângulo, as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são 3 m e 12 m. Determine as medidas dos catetos, da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa. ($3\sqrt{5}$ m, $6\sqrt{5}$ m, 15 m e 6 m)

2) Um triângulo retângulo apresenta catetos com medidas de 8 m e $4\sqrt{5}$ m e hipotenusa com medida de 12 m. Determine as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa.

($\frac{20}{3}$ m, $\frac{16}{3}$ m e $\frac{8\sqrt{5}}{3}$ m)

O TEOREMA DE PITÁGORAS

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos, tendo estas medidas todas a mesma unidade.

Se o $\triangle ABC$ é retângulo, então: $a^2 = b^2 + c^2$

Demonstração:

Sabe-se que:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{estas equações, obtém-se:}]{\text{adicionando membro a membro}} \begin{array}{r} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \\ \hline b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \end{array}$$

Como: $a = m + n$, vem:

$b^2 + c^2 = a(m + n)$

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

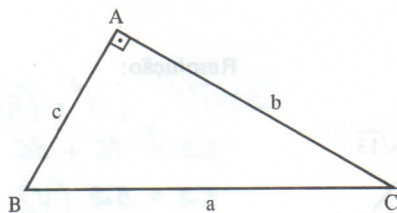
$b^2 + c^2 = a^2$ ou $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

Então não se esqueça:

$$\begin{pmatrix}\text{medida da} \\ \text{hipotenusa}\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\text{medida de} \\ \text{um cateto}\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}\text{medida do} \\ \text{outro cateto}\end{pmatrix}^2$$

Vejamos dois exemplos:

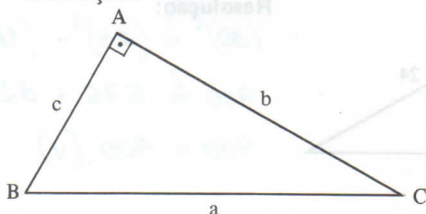
1) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são 6 m e 8 m. Determine a medida da hipotenusa.

Resolução:

$b = 6$ m
$c = 8$ m
$a = ?$

$a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = 6^2 + 8^2$
$a^2 = 36 + 64 \Rightarrow a^2 = 100$
$a = 10$

Resposta: 10 m.

2) A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo é 17 m. Sabendo que a medida de um cateto é 15 m, descubra a medida do outro cateto.

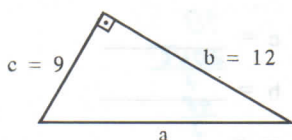
Resolução:

$a = 17$ m
$b = 15$ m
$c = ?$

$a^2 = b^2 + c^2$
$17^2 = 15^2 + c^2$
$289 = 225 + c^2 \Rightarrow c^2 = 289 - 225$
$c^2 = 64$
$c = 8$

Resposta: 8 m.

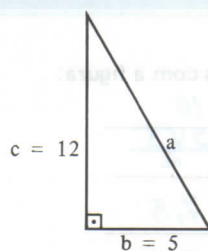
VAMOS EXERCITAR

a) Complete adequadamente conforme a figura:

1)

Resolução:

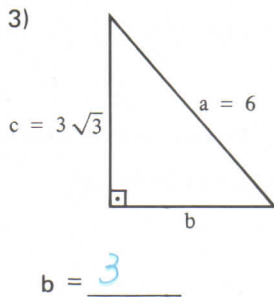
$a^2 = 12^2 + 9^2$
$a^2 = 144 + 81$
$a^2 = 225$
$a = 15$

a = 15

2)

Resolução:

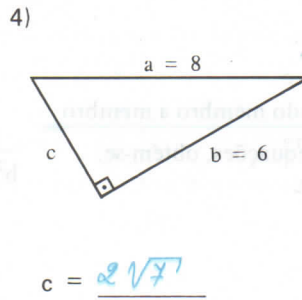
$a^2 = 5^2 + 12^2$
$a^2 = 25 + 144$
$a^2 = 169$
$a = 13$

a = 13

3)

Resolução:

$6^2 = (3\sqrt{3})^2 + b^2$
$36 = 27 + b^2$
$b^2 = 36 - 27$
$b^2 = 9$
$b = 3$

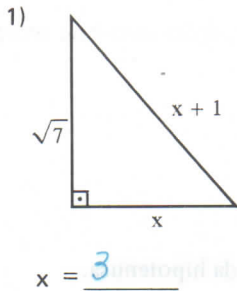
b = 3

4)

Resolução:

$8^2 = 6^2 + c^2$
$64 = 36 + c^2$
$c^2 = 64 - 36$
$c^2 = 28$
$c = \sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2\sqrt{7}$

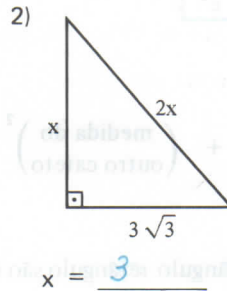
c = $2\sqrt{7}$

b) Descubra o valor de **x**, de acordo com a figura:

1)

Resolução:

$(x+1)^2 = x^2 + (\sqrt{7})^2$
$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 7$
$2x = 6$
$x = 3$

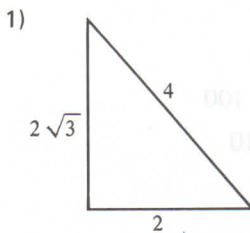
x = 3

2)

Resolução:

$(2x)^2 = x^2 + (3\sqrt{3})^2$
$4x^2 = x^2 + 27$
$3x^2 = 27$
$x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$

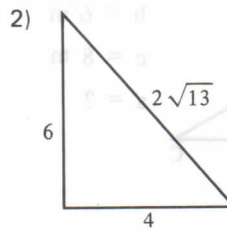
x = 3

c) Verifique se os triângulos são retângulos:

1)

Resolução:

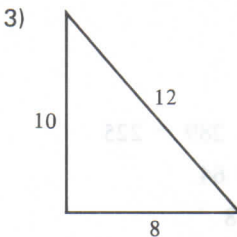
$(4)^2 \stackrel{?}{=} (2)^2 + (2\sqrt{3})^2$
$16 \stackrel{?}{=} 4 + 12$
$16 = 16$ (V)

Resposta: É retângulo.

2)

Resolução:

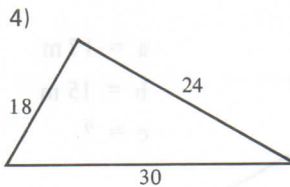
$(2\sqrt{13})^2 \stackrel{?}{=} (4)^2 + (6)^2$
$52 \stackrel{?}{=} 16 + 36$
$52 = 52$ (V)

Resposta: É retângulo.

3)

Resolução:

$(12)^2 \stackrel{?}{=} (10)^2 + (8)^2$
$144 \stackrel{?}{=} 100 + 64$
$144 = 164$ (F)

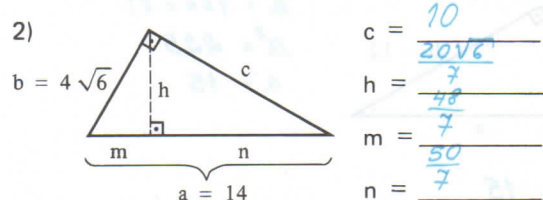
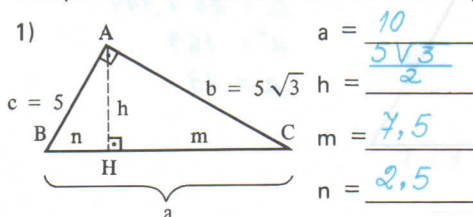
Resposta: Não é retângulo.

4)

Resolução:

$(30)^2 \stackrel{?}{=} (24)^2 + (18)^2$
$900 \stackrel{?}{=} 576 + 324$
$900 = 900$ (V)

Resposta: É retângulo.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete corretamente de acordo com a figura:

1)

a = 10
h = $\frac{5\sqrt{3}}{2}$
m = 7,5
n = 2,5

2)

c = 10
h = $\frac{20\sqrt{6}}{7}$
m = $\frac{48}{7}$
n = $\frac{50}{7}$

b) Resolva:

1) Num triângulo retângulo, as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa são 22,4 cm e 12,6 cm. Descubra as medidas dos catetos, da hipotenusa e da altura relativa à hipotenusa. (28 cm, 21 cm, 35 cm e 16,8 cm)

2) A hipotenusa e um dos catetos de um triângulo retângulo medem, respectivamente, 70 dm e 42 dm. Determine a medida do outro cateto, da altura relativa à hipotenusa e das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

(56 dm, 33,6 dm, 25,2 dm e 44,8 dm)

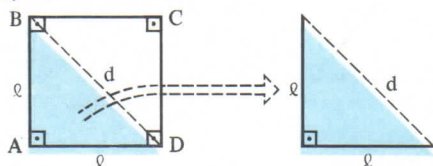
O TEOREMA DE PITÁGORAS: ALGUMAS APLICAÇÕES

Agora que você já conhece o teorema de Pitágoras, vejamos algumas das inúmeras aplicações com este teorema:

1ª) Cálculo da medida da diagonal de um quadrado

Observe:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2$

$d^2 = 2\ell^2$

$d = \sqrt{2\ell^2}$; logo: $d = \ell\sqrt{2}$

Exemplo:

Determine a medida da diagonal de um quadrado que apresenta:

1) Medida do lado: 8 cm

Resolução:

$\ell = 8$ cm, $d = ?$ $\Big\}$ $d = \ell\sqrt{2}$, $d = 8\sqrt{2}$

Resposta: $8\sqrt{2}$ cm.

2) Perímetro: 16 m

Resolução:

$2p = 16$ m, $\ell = 4$ m, $d = ?$ $\Big\}$ $d = \ell\sqrt{2}$, $d = 4\sqrt{2}$

Resposta: $4\sqrt{2}$ m.

AGORA FAÇA VOCÊ

Descubra a medida da diagonal de um quadrado que apresenta:

1) Medida do lado: 10 dm

Resolução:

$\ell = 10$, $d = ?$ $\Big\}$ $d = \ell\sqrt{2}$, $d = 10\sqrt{2}$

Resposta: $10\sqrt{2}$ dm.

2) Perímetro: 28 cm

Resolução:

$2p = 28$, $\ell = 7$, $d = ?$ $\Big\}$ $d = \ell\sqrt{2}$, $d = 7\sqrt{2}$

Resposta: $7\sqrt{2}$ cm.

3) Perímetro: 50 m

Resolução:

$2p = 50$, $\ell = 12,5$, $d = ?$ $\Big\}$ $d = \ell\sqrt{2}$, $d = 12,5\sqrt{2}$

Resposta: $12,5\sqrt{2}$ m

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Descubra uma fórmula com a qual você determina a medida do lado de um quadrado em função da diagonal.

$d = \ell\sqrt{2}$, então: $\ell = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}$, logo: $\boxed{\ell = \frac{d\sqrt{2}}{2}}$

2ª) Cálculo da medida da altura de um triângulo eqüilátero

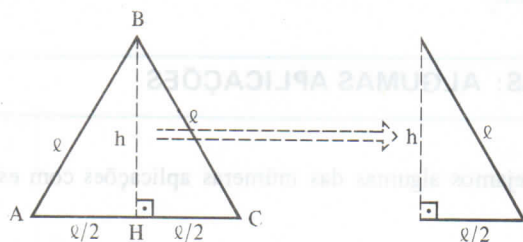
Observe:

$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2$$

$$\ell^2 = h^2 + \frac{\ell^2}{4}$$

$$4\ell^2 = 4h^2 + \ell^2 \Rightarrow 4h^2 = 4\ell^2 = \ell^2$$

$$4h^2 = 3\ell^2$$

$$h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

Exemplo:

Deteminar a medida da altura de um triângulo eqüilátero que apresenta:

1) Medida do lado: 14 cm

Resolução:

$\ell = 14$ cm, $h = ?$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

Resposta: $7\sqrt{3}$ cm.

2) Perímetro: 30 cm

Resolução:

$2p = 30$ cm, $\ell = 10$ cm, $h = ?$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

Resposta: $5\sqrt{3}$ cm.

AGORA FAÇA VOCÊ

Descubra a medida da altura de um triângulo eqüilátero que apresenta:

1) Medida do lado: 20 dm

Resolução:

$\ell = 20$ dm, $h = ?$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$

Resposta: $10\sqrt{3}$ dm.

2) Perímetro: 36 cm

Resolução:

$2p = 36$ cm, $\ell = 12$ cm, $h = ?$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

Resposta: $6\sqrt{3}$ cm.

3) Perímetro: 24 m

Resolução:

$2p = 24$ m, $\ell = 8$ m, $h = ?$

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

Resposta: $4\sqrt{3}$ m.

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Descubra a fórmula com a qual você determina a medida do lado de um triângulo eqüilátero, em função da altura:

$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$, então: $2h = \ell\sqrt{3} \Rightarrow \ell = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2h\cdot\sqrt{3}}{3}$, logo: $\boxed{\ell = \frac{2h\sqrt{3}}{3}}$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine o valor de **x**, de acordo com a figura:

1)

x = 12

2)

x = 16

3)

9
12
x
8

x = 17

4)

x = 35

5)

x = 5

6)

x = $5\sqrt{2}$

7)

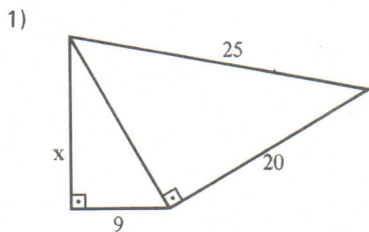
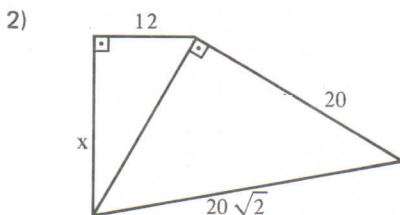
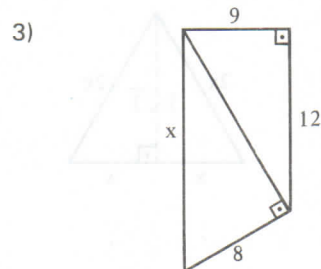
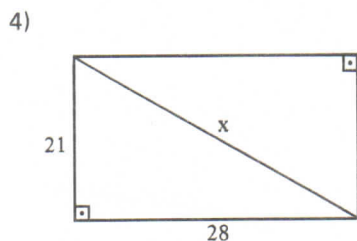
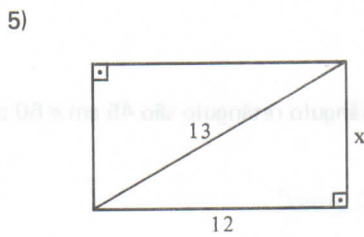
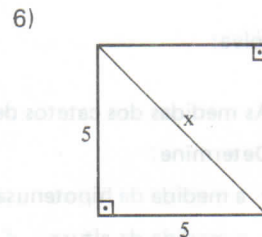
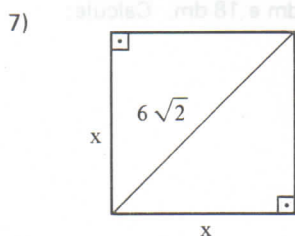
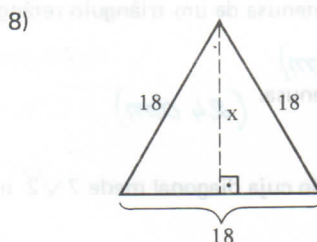
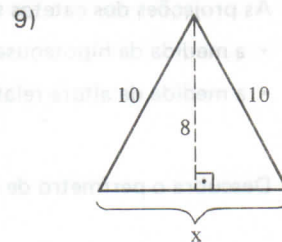
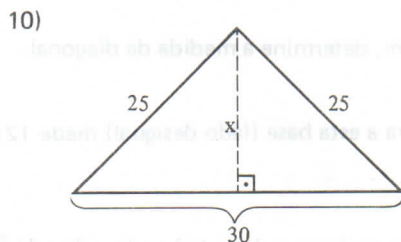
x = 6

8)

x = $9\sqrt{3}$

9)

x = 12

10)

x = 20

b) Resolva:

1) A medida do lado de um quadrado é 2 cm. Qual é a medida da sua diagonal? ($2\sqrt{2}$ cm)

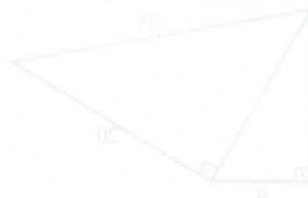
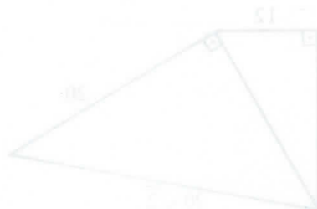
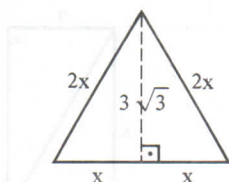
2) Determine a medida da diagonal de um quadrado cujo perímetro é 16 m. ($4\sqrt{2}$ m)

3) Sabendo que a diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ dm, descubra o seu perímetro. (20 dm)

4) As dimensões de um retângulo são 8 m e 10 m. Qual é a medida da sua diagonal? ($2\sqrt{41}$ m)

5) A medida do lado de um triângulo eqüilátero é 24 cm. Descubra a medida da sua altura. ($12\sqrt{3}$ cm)

6) Sabendo que o perímetro de um triângulo eqüilátero é 48 dm, descubra a medida da sua altura. ($8\sqrt{3}$ dm)

7) Tem-se um triângulo eqüilátero, conforme a figura. Descubra o valor representado por **x**. (3)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Resolva:

1) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são 45 cm e 60 cm.
Determine:
- a medida da hipotenusa. (75 cm)
- a medida da altura. (36 cm)

2) As projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo medem 32 dm e 18 dm. Calcule:
- a medida da hipotenusa. (50 dm)
- a medida da altura relativa à hipotenusa. (24 dm)

3) Descubra o perímetro de um quadrado cuja diagonal mede $7\sqrt{2}$ m. (28 m)

4) Calcule a medida da altura de um triângulo eqüilátero cujo perímetro mede 42 cm. ($7\sqrt{3}$ cm)

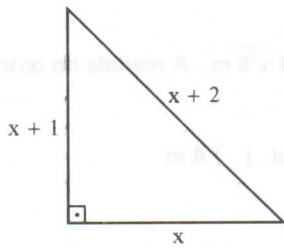
5) A base de um retângulo mede 30 dm. Sabendo que o perímetro é de 92 cm, determine a medida da diagonal.
(34 cm)

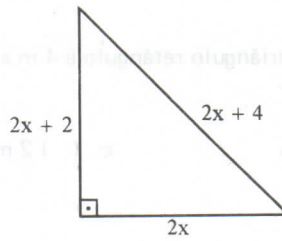
6) A base de um triângulo isósceles mede 10 m. Sabendo que a altura relativa a esta base (lado desigual) mede 12 m, determine o seu perímetro. (36 m)

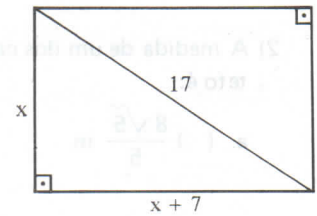
7) A base (lado desigual) de um triângulo isósceles mede 24 dm. Determine o perímetro desse triângulo, sabendo que a medida da altura é igual a $\frac{2}{3}$ da medida da base. (64 dm)

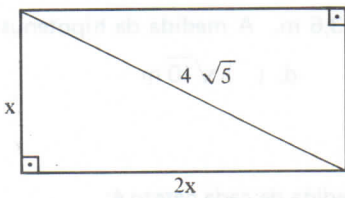
8) A medida de um cateto de um triângulo retângulo é 56 cm. Sabendo que $\frac{2}{3}$ da medida desse cateto expressa a medida do outro cateto, calcule a medida da hipotenusa. (70 cm)

b) Descubra o valor de **x**, conforme a figura:

1)

(3)

2)

(3)

3)

(8)

4)

(4)

5)

(8)

6)

(10)

7)

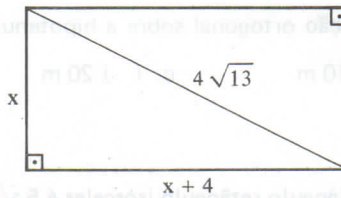
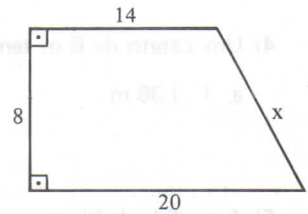
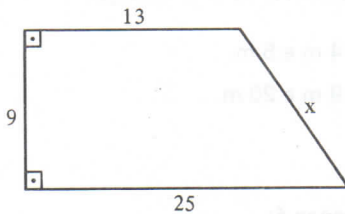
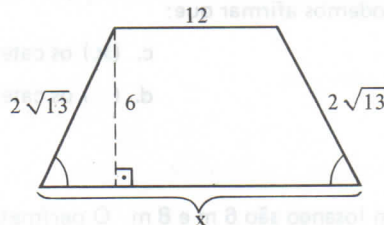
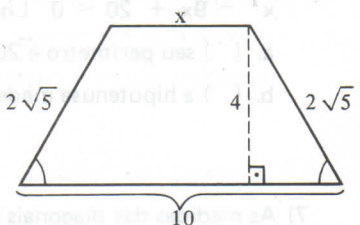
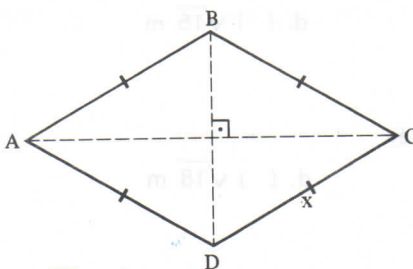
(15)

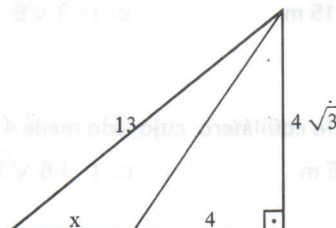
8)

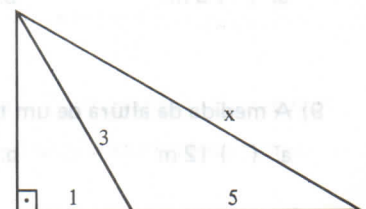
(20)

9)

(6)

10)

$(3\sqrt{5})$

11)

(7)

12)

$(2\sqrt{11})$

c) Testes:

1) Os catetos de um triângulo retângulo medem 18 cm e 24 cm. A medida da hipotenusa é:

a. ( ) 32 cm   b. ( ) 42 cm   c. (x) 30 cm   d. ( ) 35 cm

2) A medida de um dos catetos de um triângulo retângulo é 4 m e a da hipotenusa é $4\sqrt{5}$ m. A medida do outro cateto é:

a. ( ) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ m   b. (x) 8 m   c. ( ) 2 m   d. ( ) 4 m

3) As medidas de um dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo são, respectivamente, 5 cm e $5\sqrt{10}$ cm. O outro cateto mede:

a. (x) 15 cm   b. ( ) 12 cm   c. ( ) $\sqrt{10}$ cm   d. ( ) 5 cm

4) Um cateto de 6 m tem sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa medindo 3,6 m. A medida da hipotenusa é:

a. ( ) 36 m   b. (x) 10 m   c. ( ) 20 m   d. ( ) $\sqrt{10}$ m

5) A medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles é $5\sqrt{2}$ cm. A medida de cada cateto é:

a. (x) 5 cm   b. ( ) 10 cm   c. ( ) 20 cm   d. ( ) $\sqrt{5}$ cm

6) As medidas dos catetos de um triângulo retângulo são expressas, em metros, pelas raízes da equação $x^2 - 9x + 20 = 0$. Logo, podemos afirmar que:

a. ( ) seu perímetro é 20 m.
b. ( ) a hipotenusa mede 9 m.
c. (x) os catetos medem 4 m e 5 m.
d. ( ) os catetos medem 9 m e 20 m.

7) As medidas das diagonais de um losango são 6 m e 8 m. O perímetro desse losango é:

a. ( ) 10 m   b. ( ) 24 m   c. ( ) 48 m   d. (x) 20 m

8) O perímetro de um triângulo isósceles é 10 m. Sabendo que a base mede 4 m, então a medida da altura relativa a esta base é:

a. ( ) 5 m   b. ( ) 15 m   c. (x) $\sqrt{5}$ m   d. ( ) $\sqrt{15}$ m

9) A medida da altura de um triângulo eqüilátero, cujo lado mede $4\sqrt{3}$ m, é:

a. ( ) 12 m   b. (x) 6 m   c. ( ) $6\sqrt{3}$ m   d. ( ) $\sqrt{18}$ m

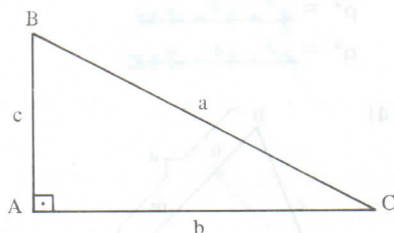
10) A medida da altura de um triângulo eqüilátero é $2\sqrt{3}$ m. O perímetro desse triângulo é:

a. ( ) $6\sqrt{3}$ m   b. ( ) 10 m   c. ( ) 8 m   d. (x) 12 m

RELAÇÕES MÉTRICAS NUM TRIÂNGULO QUALQUER

RELAÇÕES

Você já sabe que a relação que envolve as medidas dos lados de um triângulo retângulo é dada pelo teorema de Pitágoras.

Observe:

Teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$

EXERCÍCIO

Indique a relação que envolve as medidas dos lados dos seguintes triângulos:

1)

$z^2 = x^2 + y^2$

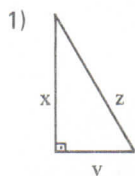
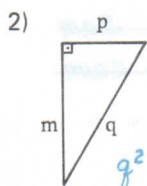
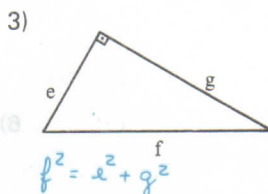
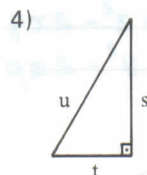
2)

$q^2 = m^2 + p^2$

3)

$f^2 = e^2 + g^2$

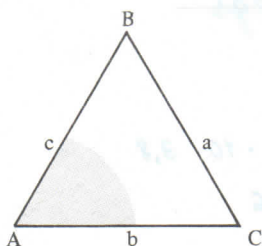
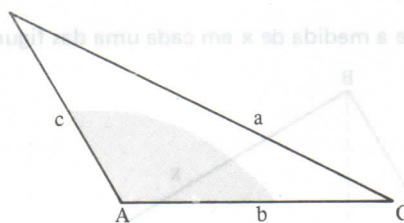
4)

$u^2 = s^2 + t^2$

Vejamos agora as relações que envolvem as medidas dos lados de um triângulo qualquer. Essas relações dependem da medida do ângulo interno do triângulo. Assim, temos:

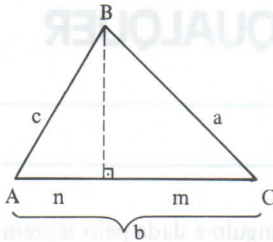
a) relação entre o ângulo agudo e o lado oposto a ele;

b) relação entre o ângulo obtuso e o lado oposto a ele.

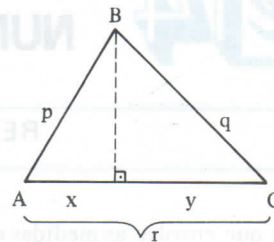
Veja:

Relação entre um ângulo agudo e o lado oposto a ele	Relação entre um ângulo obtuso e o lado oposto a ele
Num triângulo qualquer, o quadrado da medida do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o duplo produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele.	Num triângulo obtusângulo, o quadrado da medida do lado oposto ao ângulo obtuso é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, mais o duplo produto da medida de um desses lados pela medida da projeção do outro lado sobre ele.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot \text{proj}_b^c$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot b \cdot \text{proj}_b^c$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot \text{proj}_c^b$	$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot \text{proj}_c^b$

VAMOS EXERCITAR

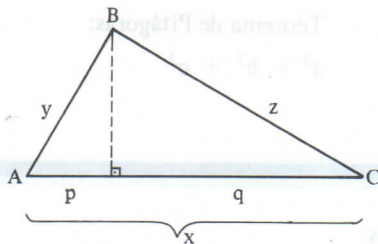
a) Complete as relações:

1)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$

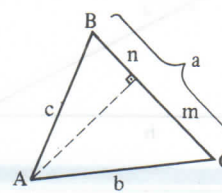
$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$

2)

$p^2 = q^2 + r^2 - 2ry$

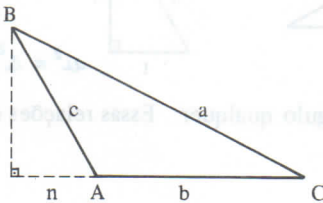
$q^2 = p^2 + r^2 - 2rx$

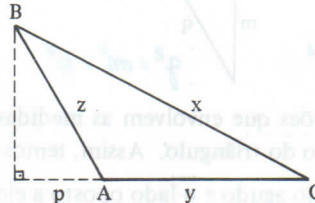
3)

$y^2 = x^2 + z^2 - 2xq$

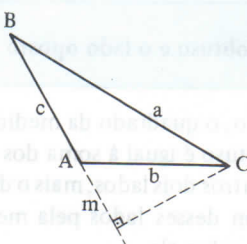
$z^2 = x^2 + y^2 - 2xp$

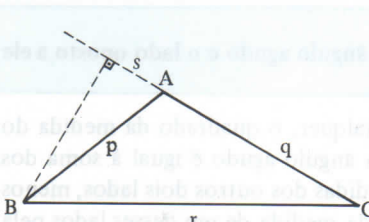
4)

$b^2 = a^2 + c^2 - 2am$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2am$

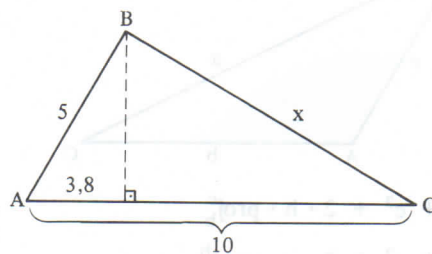
5)

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$

6)

$x^2 = y^2 + z^2 + 2yp$

7)

$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$

8)

$r^2 = p^2 + q^2 + 2qs$

b) Determine a medida de **x** em cada uma das figuras:

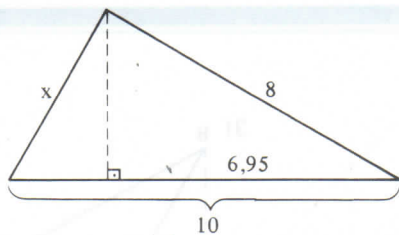
1)

$x = 7$

Resolução:

$x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3{,}8$

$x^2 = 25 + 100 - 76$

$x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$

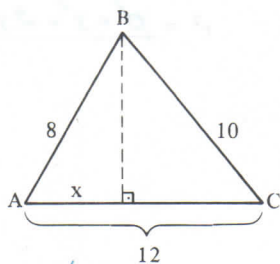
2)

x = 5

Resolução:

$x^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6,95$

$x^2 = 64 + 100 - 139$

$x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$

3)

x = 4,5

Resolução:

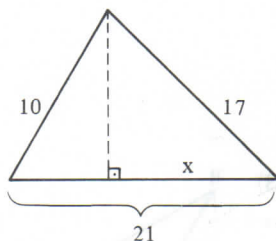
$10^2 = 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot x$

$100 = 64 + 144 - 24x$

$24x = 64 + 144 - 100$

$24x = 108$

$x = 4,5$

4)

x = 15

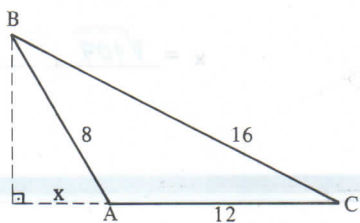
Resolução:

$10^2 = 17^2 + 21^2 - 2 \cdot 21 \cdot x$

$100 = 289 + 441 - 42x$

$42x = 630$

$x = 15$

5)

x = 2

Resolução:

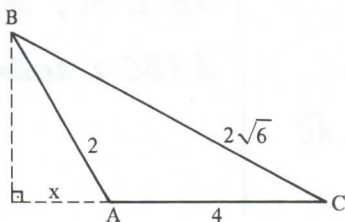
$16^2 = 8^2 + 12^2 + 2 \cdot 12 \cdot x$

$256 = 64 + 144 + 24x$

$24x = 256 - 64 - 144$

$24x = 48$

$x = 2$

6)

x = 0,5

Resolução:

$(2\sqrt{6})^2 = 2^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x$

$24 = 4 + 16 + 8x$

$8x = 4$

$x = 0,5$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as relações:

1)

$t^2 = r^2 + s^2$

2)

$x^2 = y^2 + g^2 - 2gf$

$y^2 = x^2 + g^2 - 2ge$

3)

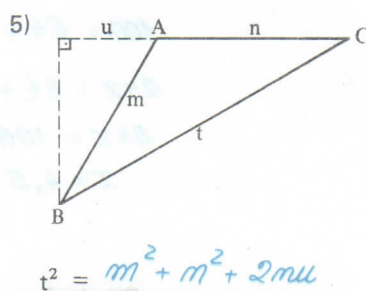
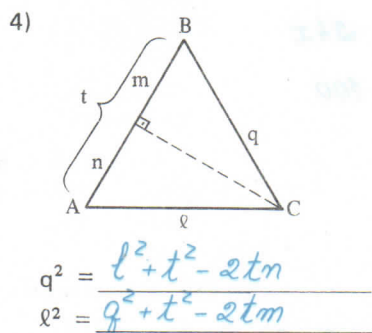
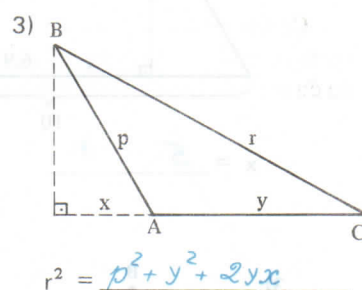
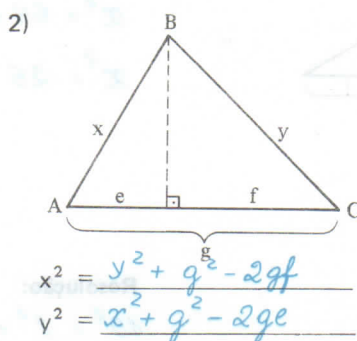
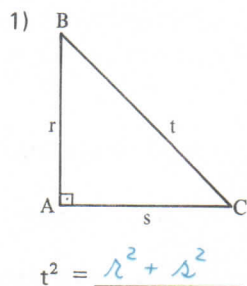
$r^2 = p^2 + y^2 + 2yx$

4)

$q^2 = \ell^2 + t^2 - 2tn$

$\ell^2 = q^2 + t^2 - 2tm$

5)

$t^2 = m^2 + n^2 + 2nu$

b) Determinar o valor de **x**, de acordo com as figuras:

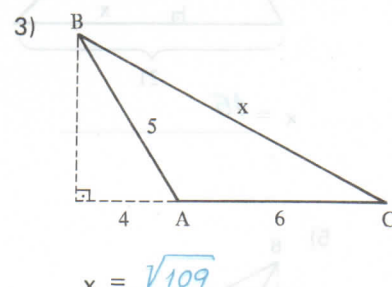
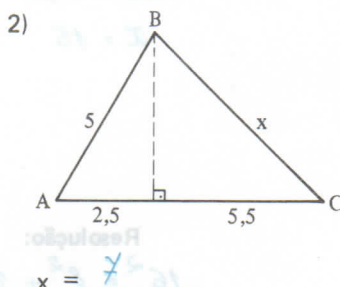
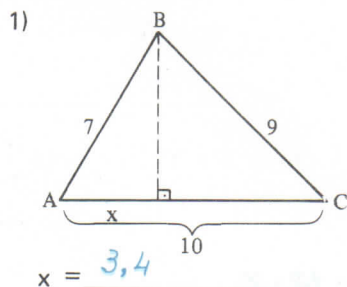
1)

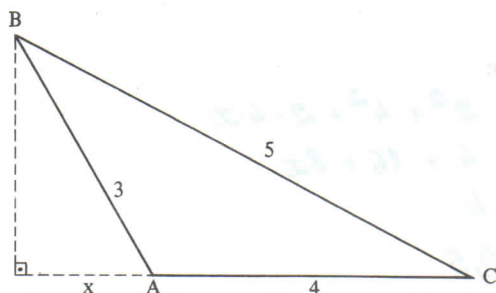
x = 3,4

2)

x = 7

3)

$x = \sqrt{109}$

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Depois de calcular o valor de **x**, a que conclusão você chega com relação ao $\triangle ABC$?

$5^2 = 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot x$

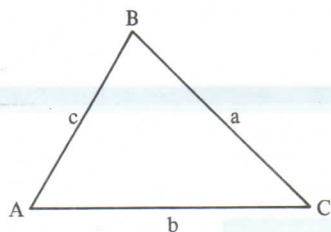
$25 = 9 + 16 + 8x$

$8x = 0 \Longrightarrow x = 0$

Como $x = 0 \Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{AC}$

Concluo que se $\overline{AB} \perp \overline{AC}$, o $\triangle ABC$ é retângulo.

RECONHECIMENTO DE UM TRIÂNGULO

Conhecendo as medidas dos três lados de um triângulo, pode-se descobrir a sua natureza com relação aos ângulos, ou seja, pode-se descobrir se o triângulo é acutângulo, obtusângulo ou retângulo. Para isso, basta comparar o quadrado da medida do lado maior com a soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados.

$\overline{BC}$: lado maior

Se $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é acutângulo.

Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o triângulo é retângulo.

Se $a^2 > b^2 + c^2$, então o triângulo é obtusângulo.

Observe o exemplo:

Identifique os triângulos a partir das medidas dos lados:

1) a = 7, b = 5, c = 3

Resolução:

$7^2 \overset{?}{\therefore} 5^2 + 3^2$

$49 \overset{?}{\therefore} 25 + 9$

$49 \overset{>}{\therefore} 34$

Logo, o triângulo é obtusângulo.

2) a = 6, b = 5, c = 4

Resolução:

$6^2 \overset{?}{\therefore} 5^2 + 4^2$

$36 \overset{?}{\therefore} 25 + 16$

$36 \overset{<}{\therefore} 41$

Logo, o triângulo é acutângulo.

3) a = 17, b = 15, c = 8

Resolução:

$17^2 \overset{?}{\therefore} 15^2 + 8^2$

$289 \overset{?}{\therefore} 225 + 64$

$289 \overset{=}{\ldots} 289$

Logo, o triângulo é retângulo.

VAMOS EXERCITAR

Conhecendo as medidas dos lados, classifique os triângulos quanto aos ângulos:

1) 5, 6 e 7
R.: Acutângulo.

2) 15, 9 e 12
R.: Retângulo.

3) 13, 5 e 12
R.: Retângulo.

4) 2, 8 e 7
R.: Obtusângulo.

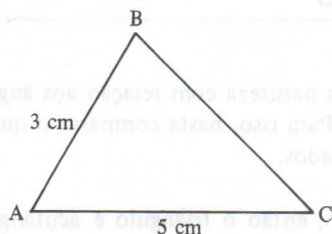
5) 12, 7 e 10
R.: Acutângulo.

6) 9, 5 e 11
R.: Obtusângulo.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete o quadro:

a	b	c	Natureza do triângulo
20	16	12	retângulo
10	8	7	acutângulo
14	11	8	obtusângulo
20	15	12	obtusângulo
13	12	9	acutângulo
29	21	20	retângulo

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Sendo $\overline{BC}$ o lado maior deste triângulo, determine as possíveis medidas expressas por números inteiros, para que o ΔABC seja obtusângulo. (6 cm e 7 cm)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Sendo **a**, **b** e **c** as medidas dos lados de um triângulo, complete o quadro:

a	b	c	Natureza do triângulo
7	2	6	obtusângulo
9	8	$\sqrt{17}$	retângulo
$\sqrt{13}$	2	3	retângulo
13	12	11	acutângulo
$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	retângulo
$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	acutângulo

b) Resolva:

1) Os lados de um triângulo medem 8 cm, 9 cm e 10 cm. Determine:
- a natureza desse triângulo; (acutângulo)
- a medida da projeção do lado menor sobre o lado maior. (4,15 cm)

2) Os lados de um triângulo medem 10 dm, 12 dm e 14 dm. Determine:
- a natureza desse triângulo; (acutângulo)
- a medida da projeção do lado maior sobre o lado menor. (7,6 dm)

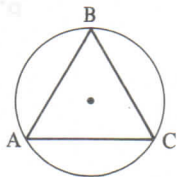
3) Os lados de um triângulo medem 15 cm, 20 cm e 25 cm. Descubra:
- a natureza desse triângulo; (retângulo)
- a medida da projeção do lado menor sobre o lado maior. (9 cm)

4) As medidas dos lados de um triângulo são 9 m, 40 m e 41 m. Determine:
- a natureza desse triângulo; (retângulo)
- a medida da projeção do lado menor sobre o lado cuja medida é 40 m. (0 cm)

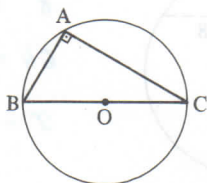
5) A base de um triângulo mede 10 cm. Sabendo que os outros dois lados medem, respectivamente, 8 cm e 3 cm, determine:
- a natureza desse triângulo; (obtusângulo)
- a medida da projeção do lado que mede 8 cm sobre a base; (7,75 cm)
- a medida da projeção do lado menor sobre o lado que mede 8 cm. (1,6875 cm)

RELAÇÕES MÉTRICAS NO CÍRCULO

NOÇÃO DE TRIÂNGULO INSCRITO NUMA CIRCUNFERÊNCIA: RELAÇÕES MÉTRICAS

Observe a figura:

Note que os três vértices do ΔABC pertencem à circunferência. Quando isso ocorre, diz-se que o triângulo está inscrito na circunferência.

Se um dos lados do triângulo inscrito coincidir com um diâmetro, esse triângulo é retângulo.

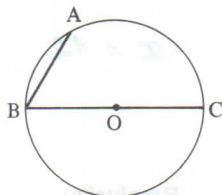
Veja:

$\overline{BC}$: diâmetro
$\overline{AB}$: corda
$\overline{AC}$: corda

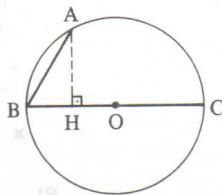
$\Rightarrow \Delta ABC$ é retângulo em A

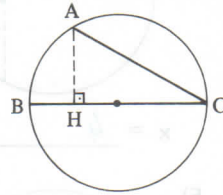
Logo, são válidas as relações métricas do triângulo retângulo.

VAMOS EXERCITAR

a) Dê a denominação dos segmentos:

1)

$\overline{AB}$: corda
$\overline{BC}$: diâmetro
$\overline{OC}$: raio

2)

$\overline{BH}$: projeção da corda $\overline{AB}$ sobre o diâmetro $\overline{BC}$

3)

$\overline{HC}$: projeção da corda $\overline{AC}$ sobre o diâmetro $\overline{BC}$

b) Complete as relações de acordo com as figuras:

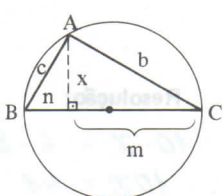
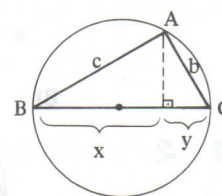
1)

$m(\overline{BC}) = d$

$c^2 = d \cdot n$

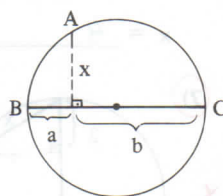
$b^2 = d \cdot m$ $\quad d \cdot x = b \cdot c$

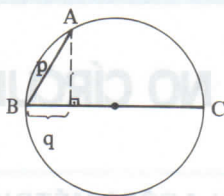
$x^2 = m \cdot n$ $\quad d^2 = b^2 + c^2$

2)

$m(\overline{BC}) = d$

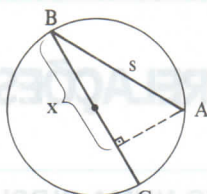
$b^2 = d \cdot y$

$c^2 = d \cdot x$

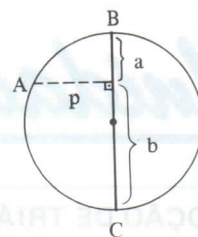
3)

$x^2 = a \cdot b$

4)

$m(\overline{BC}) = d$

$p^2 = d \cdot q$

5)

$m(\overline{BC}) = d$

$s^2 = d \cdot x$

6)

$p^2 = a \cdot b$

c) Determine o valor de **x** de acordo com as figuras:

1)

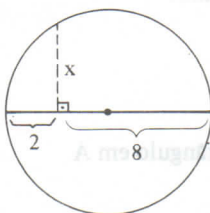
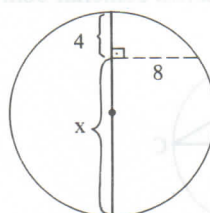
Resolução:

$x^2 = 2 \cdot 8$

$x^2 = 16$

$x = 4$

x = 4

2)

Resolução:

$8^2 = 4 \cdot x$

$64 = 4 \cdot x$

$x = \frac{64}{4} = 16$

x = 16

3)

Resolução:

$x^2 = 2 \cdot 8$

$x^2 = 16$

$x = 4$

x = 4

4)

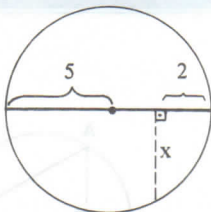
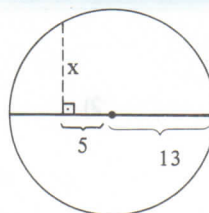
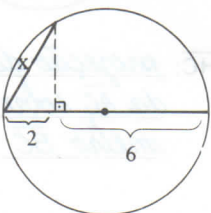
Resolução:

$x^2 = 8 \cdot 18$

$x^2 = 144$

$x = 12$

x = 12

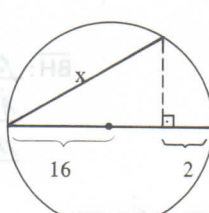
5)

Resolução:

$x^2 = 8 \cdot 2$

$x^2 = 16$

$x = 4$

x = 4

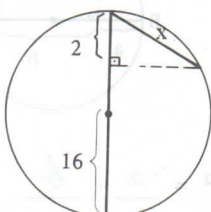
6)

Resolução:

$x^2 = 32 \cdot 30$

$x^2 = 960$

$x = 8\sqrt{15}$

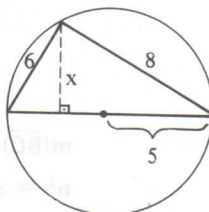
x = $8\sqrt{15}$

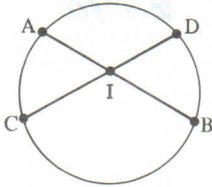
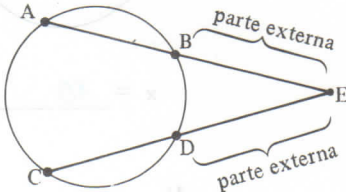
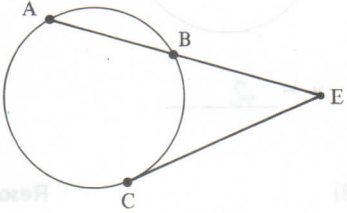
7) ✗

Resolução:

$x^2 = 32 \cdot 2$

$x^2 = 64$

$x = 8$

x = 8

8)

Resolução:

$10 \cdot x = 6 \cdot 8$

$10x = 48$

$x = 4,8$

x = 4,8

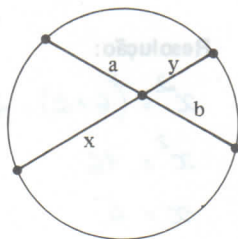
OUTRAS RELAÇÕES MÉTRICAS

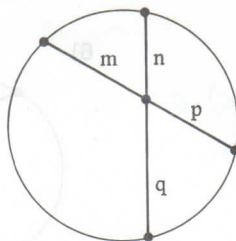
Você acabou de estudar algumas relações métricas num triângulo retângulo inscrito numa circunferência. Vejamos outras relações.

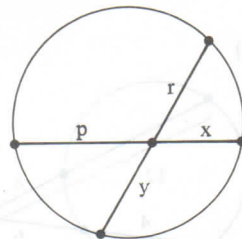
Primeira relação: corda com corda	**Segunda relação: secante com secante**	**Terceira relação: secante com tangente**
Se duas cordas se interceptam, então o produto das medidas dos segmentos determinados em uma delas é igual ao produto das medidas dos segmentos determinados na outra. $AI \cdot IB = CI \cdot ID$	Se de um ponto exterior a uma circunferência são traçados dois segmentos de secante, então o produto da medida de um deles pela medida de sua parte externa é igual ao produto da medida do outro pela medida da sua parte externa. $AE \cdot BE = CE \cdot DE$	Se de um ponto exterior a uma circunferência são traçados um segmento de secante e um de tangente, então o quadrado da medida do segmento de tangente é igual ao produto da medida do segmento de secante pela medida de sua parte externa. $CE^2 = AE \cdot BE$

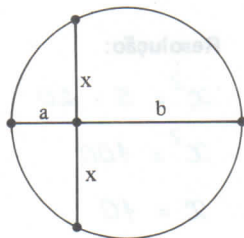
VAMOS EXERCITAR

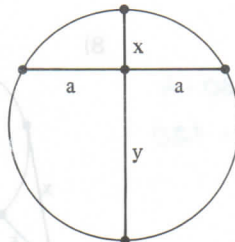
a) De acordo com a figura, escreva a relação correspondente:

1)

Relação: $a \cdot b = x \cdot y$

2)

Relação: $m \cdot p = n \cdot q$

3)

Relação: $p \cdot x = r \cdot y$

4)

Relação: $x^2 = a \cdot b$

5)

Relação: $a^2 = x \cdot y$

6)

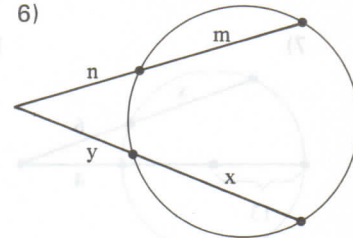
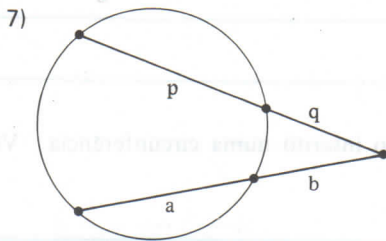
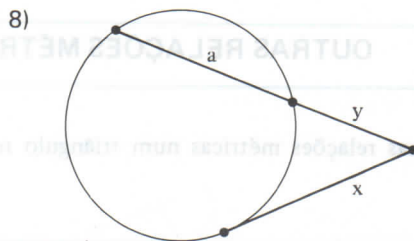
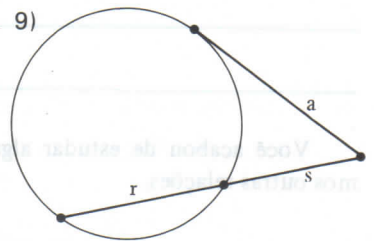
Relação: $(x+y)y = (m+n)n$

7)

Relação: $(p+q)q=(a+b)b$

8)

Relação: $x^2=(a+y)\cdot y$

9)

Relação: $a^2=(r+s)s$

b) Descubra o valor de **x**:

1)

Resolução:

$6\cdot x = 4\cdot 3$

$6x = 12$

$x = 2$

x = 2

2)

Resolução:

$2\cdot x = 4\cdot 5$

$2x = 20$

$x = 10$

x = 10

3)

Resolução:

$x^2 = 4\cdot 16$

$x^2 = 64$

$x = 8$

x = 8

4)

Resolução:

$x^2 = 8\cdot 18$

$x^2 = 144$

$x = 12$

x = 12

5)

Resolução:

$12\cdot x = (4+6)\cdot 6$

$12x = 60$

$x = 5$

x = 5

6)

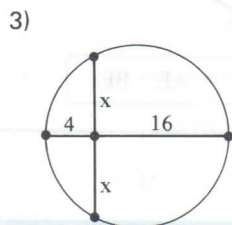
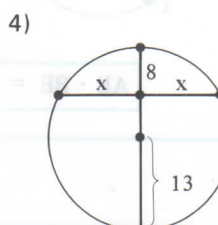
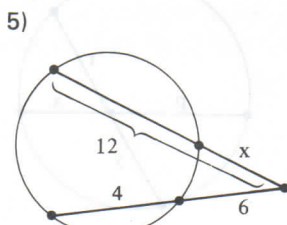
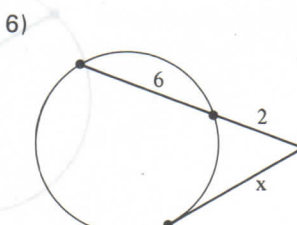
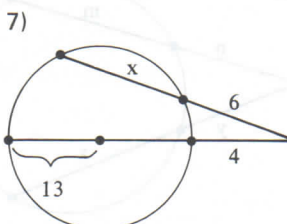
Resolução:

$x^2 = (6+2)\cdot 2$

$x^2 = 16$

$x = 4$

x = 4

7)

Resolução:

$(x+6)6 = 30\cdot 4$

$6x + 36 = 120$

$6x = 84$

$x = 14$

x = 14

8)

Resolução:

$x^2 = 5\cdot 20$

$x^2 = 100$

$x = 10$

x = 10

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Determine o valor de **x**, de acordo com a figura:

1)

x = 2

2)

x = 2

3)

x = 6

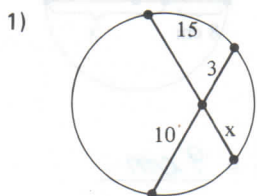
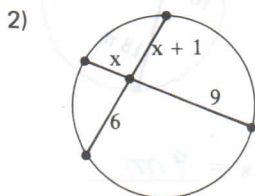
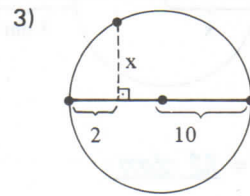
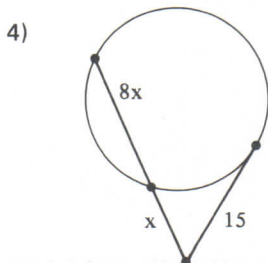
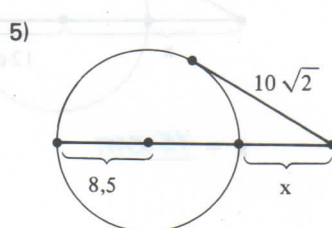
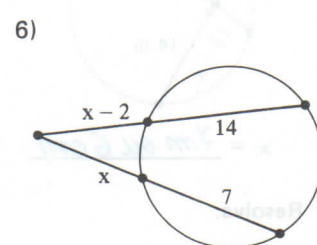
4)

x = 5

5)

x = 8

6)

x = 8

b) Resolva:

1) Num círculo, uma corda $\overline{AB}$ mede 6 cm. Determine a medida do raio desse círculo, sabendo que a projeção dessa corda sobre o diâmetro $\overline{AC}$ mede 4 cm. (4,5 cm)

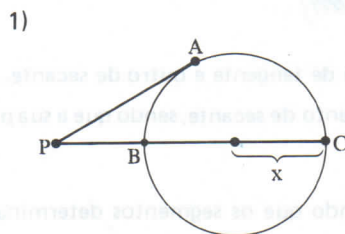
2) A medida da projeção de uma corda $\overline{AB}$ sobre o diâmetro $\overline{AC}$ é 4 dm. Descubra a medida dessa corda, sabendo que o raio do círculo mede 8 dm. (8 dm)

3) Num círculo, duas cordas se interceptam. Sabendo que os segmentos determinados numa delas medem 4 cm e 25 cm, descubra a medida da outra corda, cujos segmentos nela determinados são congruentes. (20 cm)

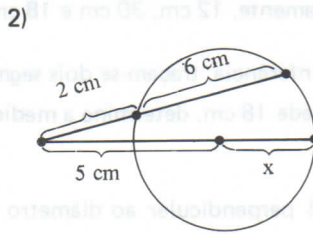
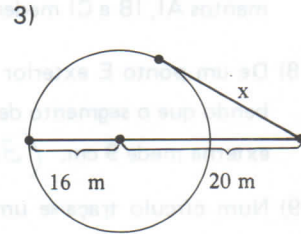
4) De um ponto exterior a uma circunferência traçam-se dois segmentos de secante, cujas medidas são: 20 cm e 15 cm. Sabendo que a parte externa do segmento de 20 cm mede 3 cm, determine a medida da parte externa do outro segmento. (4 cm)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Determine o valor de **x** nas seguintes figuras:

1)

PA = 24 cm

PC = 32 cm

x = 7 cm

2)

x = 3 cm

3)

x = 12 m

4)

x = 12 dm

5)

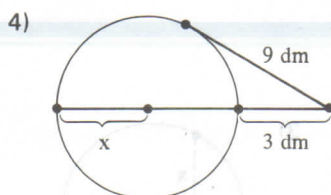
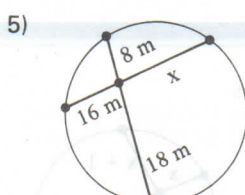
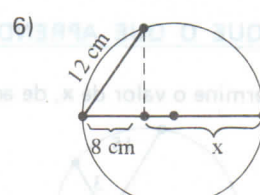
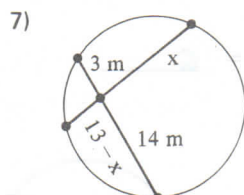
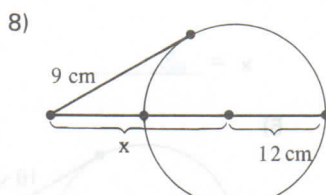
x = 9 m

6)

x = 9 cm

7)

x = 7 m ou 6 cm

8)

x = 15 cm

b) Resolva:

1) De um ponto P exterior a uma circunferência, você traça um segmento de secante que passa pelo centro e um segmento de tangente que mede 20 cm. Determine a medida do raio dessa circunferência, sabendo que a distância do ponto P ao centro é de 25 cm. (15 cm)

2) De um ponto exterior a uma circunferência traça-se um segmento de secante que mede 20 m e um de tangente que mede 16 m. Descubra a medida da parte externa do segmento de secante. (12,8 m)

3) Duas cordas se interceptam. Os segmentos determinados numa delas medem 12 m e 15 m. Determine as medidas dos segmentos determinados na outra corda cuja medida é 28 m. (10 m e 18 m)

4) Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda cuja projeção sobre esse diâmetro mede 4 cm. Calcule a medida dessa corda, sabendo que o raio da circunferência mede 12,5 cm. (10 cm)

5) Da extremidade de um diâmetro traça-se uma corda cuja medida é 24 dm. Determine a medida do raio da circunferência, sabendo que a projeção da corda sobre o diâmetro mede 16 dm. (18 dm)

6) De um ponto P exterior a uma circunferência traçam-se dois segmentos de secante cujas medidas são: 32 cm e 40 cm. Sabendo que a parte externa do segmento menor mede 5 cm, determine a medida da parte externa do outro segmento. (4 cm)

7) Duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se interceptam determinando o ponto I. Calcule a medida da corda $\overline{CD}$, sabendo que os segmentos $\overline{AI}$, $\overline{IB}$ e $\overline{CI}$ medem, respectivamente, 12 cm, 30 cm e 18 cm. (38 cm)

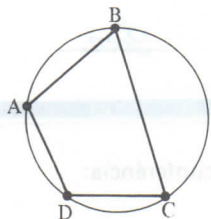
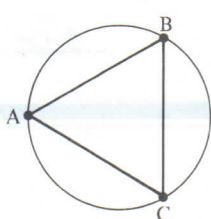
8) De um ponto E exterior a uma circunferência, traçam-se dois segmentos: um de tangente e outro de secante. Sabendo que o segmento de tangente mede 18 cm, determine a medida do segmento de secante, sendo que a sua parte externa mede 9 cm. (36 cm)

9) Num círculo traça-se uma corda $\overline{AB}$ perpendicular ao diâmetro $\overline{CD}$. Sabendo que os segmentos determinados no diâmetro medem 4 dm e 49 dm, calcule as medidas dos segmentos determinados na corda $\overline{AB}$. (14 dm e 14 dm)

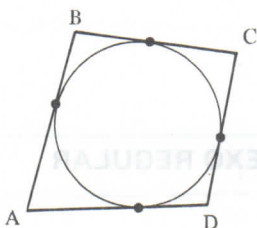
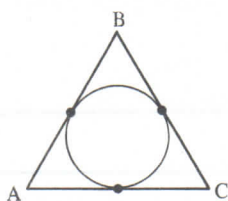
10) De um ponto E exterior a uma circunferência, traça-se um segmento de secante com 4 cm, cuja parte externa mede 3 cm. Sabendo que a medida do raio é igual a 2 cm, calcule a distância do ponto E à circunferência. (2 cm)

ESTUDO DOS POLÍGONOS REGULARES

NOÇÃO DE POLÍGONO INSCRITÍVEL E CIRCUNSCRITÍVEL

Observe as figuras:

Perceba que todos os lados do triângulo e do quadrilátero constituem cordas.

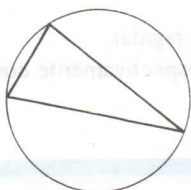
Pois bem, se todos os lados de um polígono constituem cordas de uma circunferência, diz-se que ele está **inscrito** na circunferência, enquanto a circunferência é **circunscrita** ao polígono.

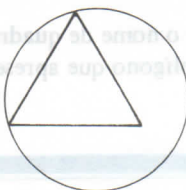
Agora veja:

Perceba que todos os lados do triângulo e do quadrilátero tangenciam a circunferência.

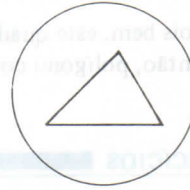
Pois bem, se todos os lados de um polígono tangenciam uma circunferência, diz-se que ele está **circunscrito** à circunferência, enquanto a circunferência está **inscrita** no polígono.

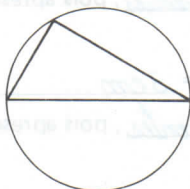
EXERCÍCIOS

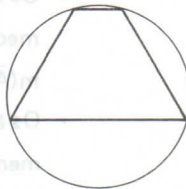
a) Verifique nas figuras se o polígono está ou não inscrito na circunferência (responda sim ou não):

1)

Sim.

2)

Não.

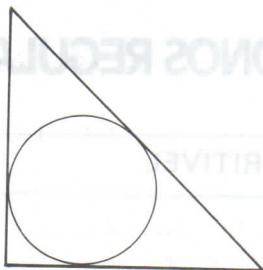
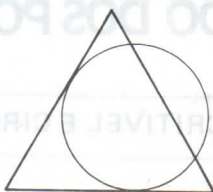
3)

Não.

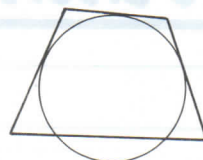
4)

Sim.

5)

Sim.

6)

Não.

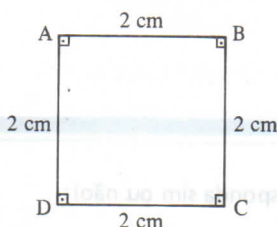
b) Verifique nas figuras se o polígono está ou não circunscrito à circunferência (responda sim ou não):

1)
Sim.

2)
Não.

3)
Sim.

4)
Não.

DESENVOLVA A SUA CRIATIVIDADE

Dada a circunferência, inscreva e circunscreva um hexágono nessa circunferência:

NOÇÃO DE POLÍGONO CONVEXO REGULAR

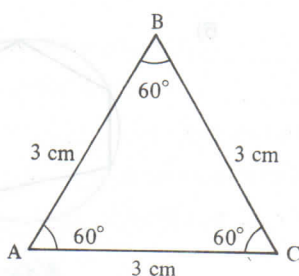
Observe o quadrilátero:

Perceba que este quadrilátero apresenta:

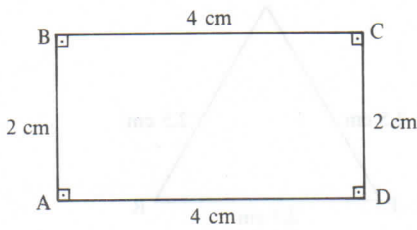
- Os lados congruentes:
  $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{CD}) = m(\overline{DA}) = 2$ cm
- Os ângulos internos congruentes:
  $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = 90°$

Pois bem, este quadrilátero, que recebe o nome de **quadrado**, constitui um polígono regular.
Então, polígono convexo regular é o polígono que apresenta os lados e os ângulos respectivamente congruentes.

EXERCÍCIOS

a) Complete as sentenças, conforme a figura:

1)

- Os lados do ΔABC são congruentes, pois apresentam a mesma medida.
  $m(\overline{AB}) = m(\overline{BC}) = m(\overline{CA}) =$ 3cm
- Os ângulos internos são congruentes, pois apresentam a mesma medida.
  $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) =$ 60°
- Então o ΔABC constitui um polígono regular.

2)

- Os lados não são *congruentes*, pois não apresentam a mesma medida.

  m($\overline{AB}$) = m($\overline{CD}$) = *2 cm*

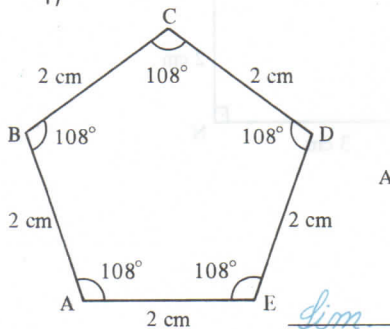
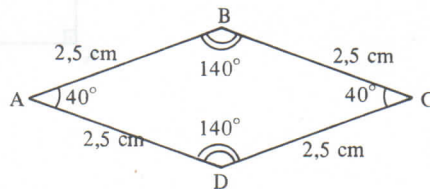
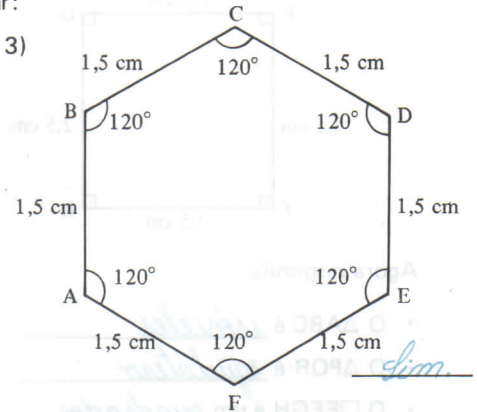
  m($\overline{BC}$) = m($\overline{AD}$) = *4 cm*

  $\Longrightarrow$ m($\overline{AB}$) $\neq$ m($\overline{BC}$)

- Os ângulos internos são *congruentes*, pois apresentam a mesma medida.

  m($\hat{A}$) = m($\hat{B}$) = m($\hat{C}$) = m($\hat{D}$) = *90°*

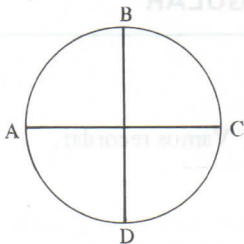
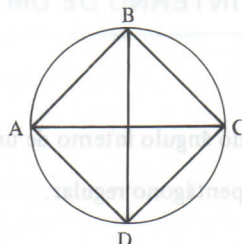
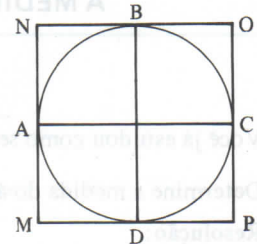
- Então o quadrilátero não constitui polígono *regular*.

b) Depois de analisar a figura, indique se ela constitui ou não polígono regular:

Com relação aos polígonos convexos regulares, você deve saber que:

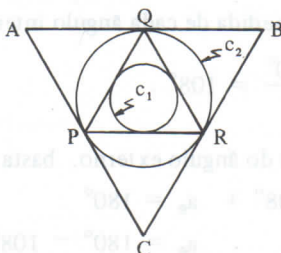
1.º) Dividindo uma circunferência em três ou mais arcos congruentes e unindo os extremos desses arcos através de segmentos de reta, obtemos um polígono regular inscrito.

2.º) Dividindo uma circunferência em três ou mais arcos congruentes e traçando segmentos de tangentes pelos extremos desses arcos, obtemos um polígono regular circunscrito.

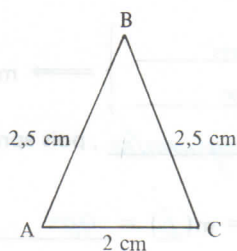
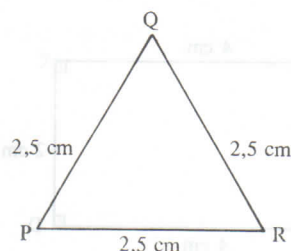
Observe um exemplo:

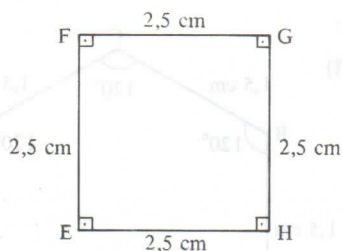
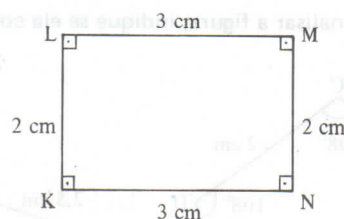
Traçando dois diâmetros perpendiculares, determinamos na circunferência quatro arcos congruentes.

$\widehat{AB} \cong \widehat{BC} \cong \widehat{CD} \cong \widehat{DA}$

□ABCD regular inscrito

□MNOP regular circunscrito

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete as sentenças, conforme a figura:

- O ΔPQR está *inscrito* na circunferência c_2.
- O ΔPQR é *circunscrito* à circunferência c_1.
- A circunferência c_1 está inscrita no Δ *PQR*.
- A circunferência c_2 está inscrita no Δ *ABC*.
- A circunferência c_2 é circunscrita ao Δ *PQR*.

b) Observe as figuras:

1)

2)

3)

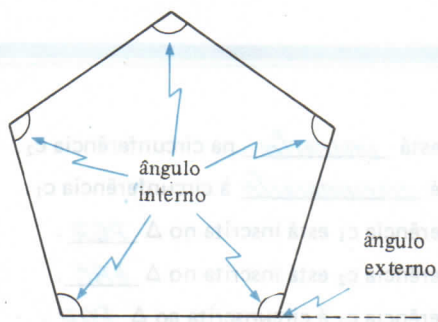
4)

Agora responda:

- O ΔABC é *isósceles*
- O ΔPQR é *eqüilátero*
- O ☐EFGH é um *quadrado*
- O ☐KLMN é um *retângulo*
- Dentre estes polígonos, são regulares apenas *2* e *3*.

A MEDIDA DO ÂNGULO INTERNO DE UM POLÍGONO REGULAR

Você já estudou como se determina a medida do ângulo interno de um polígono regular. Vamos recordar.

Determine a medida do ângulo interno de um pentágono regular.

Resolução:

- Primeiramente, determina-se a soma das medidas dos ângulos internos.

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$
$S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180°$
$S_i = 540°$

- A seguir descobre-se a medida de cada ângulo interno.

$a_i = \frac{S_i}{n} \Longrightarrow a_i = \frac{540°}{5} = 108°$

- Para descobrir a medida do ângulo externo, basta lembrar que:

$a_i + a_e = 180° \Longrightarrow 108° + a_e = 180°$
$a_e = 180° - 108° = 72°$

AGORA É A SUA VEZ

Descubra a medida do ângulo interno e do ângulo externo dos polígonos regulares:

1) Triângulo

Resolução:

$S_i = (n-2) \cdot 180°$
$S_i = (3-2) \cdot 180°$
$S_i = 180°$
$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{180°}{3} = 60°$
$a_e = 180° - 60° = 120°$

2) Hexágono

Resolução:

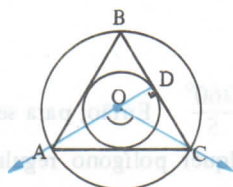
$S_i = (n-2) \cdot 180°$
$S_i = (6-2) \cdot 180°$
$S_i = 720°$
$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{720°}{6} = 120°$
$a_e = 180° - 120° = 60°$

3) Octógono

Resolução:

$S_i = (n-2) \cdot 180°$
$S_i = (8-2) \cdot 180°$
$S_i = 1\,080°$
$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{1\,080°}{8} = 135°$
$a_e = 180° - 135° = 45°$

OS ELEMENTOS DE UM POLÍGONO REGULAR

Considere a figura, que corresponde a um triângulo regular inscrito e circunscrito:

Note que:

- O centro das duas circunferências constitui o **centro do triângulo.**
- A distância entre o centro e cada um dos vértices constitui o **raio do triângulo.**

  $\overline{OC}$: raio do triângulo.

  Este raio corresponde ao raio da circunferência circunscrita.

- A distância entre o centro e cada um dos lados constitui o **apótema do triângulo.**

  $\overline{OD}$: apótema do triângulo.

  O apótema corresponde ao raio da circunferência inscrita.

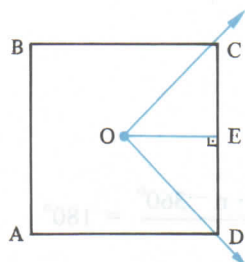
- O ângulo cujo vértice é o centro e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do triângulo constitui o **ângulo central do triângulo.**

  $A\hat{O}C$: ângulo central do triângulo.

Estes elementos analisados para um triângulo regular existem para qualquer polígono regular.

VAMOS EXERCITAR

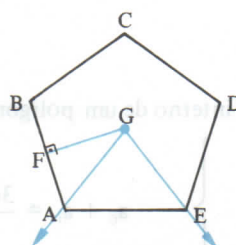
Dados os polígonos regulares, complete adequadamente:

1)

centro: O

raio: $\overline{OC}$

apótema: $\overline{OE}$

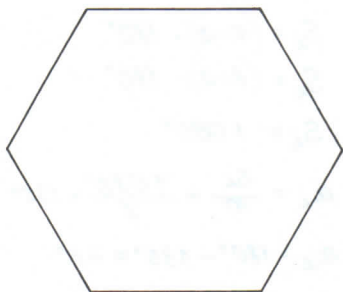
ângulo central: $C\hat{O}D$

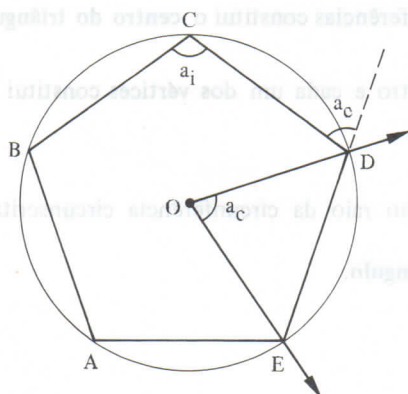
2)

centro: G

raio: $\overline{GA}$

apótema: $\overline{FG}$

ângulo central: $A\hat{G}E$

Dado o hexágono regular, indique o seu centro, o raio, o apótema e o ângulo central. Trace ainda as circunferências inscrita e circunscrita:

DETERMINAÇÃO DA MEDIDA DO ÂNGULO CENTRAL

Observe a figura:

Pentágono regular

Percebe-se facilmente que: $a_c = \frac{360°}{5}$. Então, para se achar a medida do ângulo central de qualquer polígono regular, basta aplicar:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Você já estudou que: $a_e = \frac{360°}{n}$ e $a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. Disto se conclui que:

1.º) Os ângulos central e externo de um polígono regular são congruentes.

$$\left.\begin{array}{l} a_c = \dfrac{360°}{n} \\ a_e = \dfrac{360°}{n} \end{array}\right\} \Longrightarrow a_c = a_e$$

2.º) Os ângulos central e interno de um polígono regular são suplementares.

$$\left.\begin{array}{l} a_c = \dfrac{360°}{n} \\ a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_c + a_i = \dfrac{360°}{n} + \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \dfrac{360° + 180° \cdot n - 360°}{n} = 180° \\ a_c + a_i = 180° \end{array}$$

Veja um exemplo:

Determine a_c, a_e e a_i de um polígono regular de 15 lados.

Resolução:

$n = 15$

$a_c = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{15} = 24°$

$a_e = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{15} = 24°$

$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{(15-2) \cdot 180°}{15} = 156°$

Determine a_c, a_e e a_i dos seguintes polígonos regulares:

1) Hexágono

Resolução:

$n = 6$ $a_c = \frac{360°}{6} = 60°$

$a_e = \frac{360°}{6} = 60°$

$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{4 \cdot 180°}{6} = 120°$

2) Octógono

Resolução:

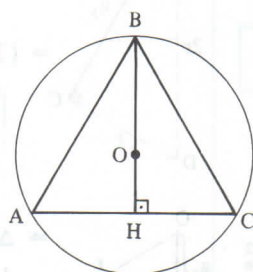
$n = 8$ $a_c = \frac{360°}{8} = 45°$

$a_e = \frac{360°}{8} = 45°$

$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

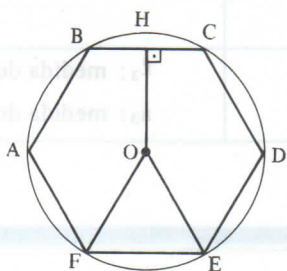
a) Complete, conforme a figura:

1)

ΔABC eqüilátero

raio: $\overline{OB}$

apótema: $\overline{OH}$

altura: $\overline{BH}$

2)

hexágono regular

raio: $\overline{OF}$

apótema: $\overline{OH}$

ângulo central: $E\hat{O}F$

b) Determine a_c, a_e e a_i dos polígonos regulares:

1) triângulo

a_c = 120°

a_e = 120°

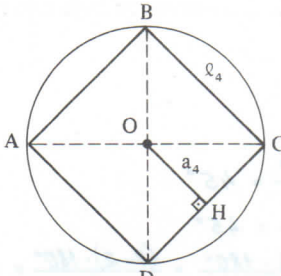
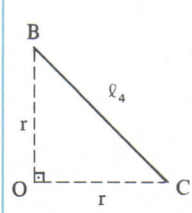
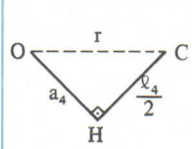
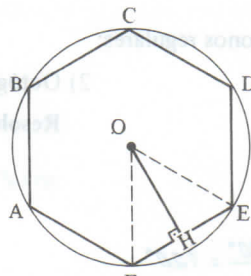
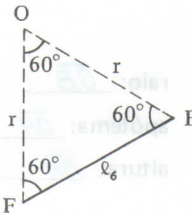
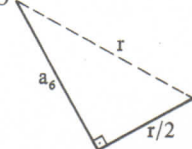
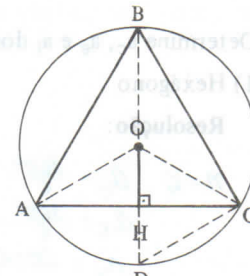
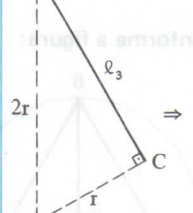
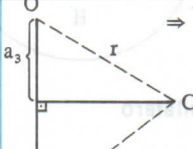
a_i = 60°

2) decágono

a_c = 36°

a_e = 36°

a_i = 144°

3) dodecágono

a_c = 30°

a_e = 30°

a_i = 150°

CÁLCULO DA MEDIDA DO LADO E DO APÓTEMA EM FUNÇÃO DO RAIO

Observe o quadro:

Quadrado	Hexágono regular	Triângulo eqüilátero
$\ell_4^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell_4^2 = 2r^2$; $\ell_4 = r\sqrt{2}$	$\ell_6 = r$	$(2r)^2 = r^2 + \ell_3^2$; $\ell_3 = r\sqrt{3}$
$r^2 = \frac{\ell_4^2}{4} + a_4^2$; $r^2 = \frac{2r^2}{4} + a_4^2$; $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$	$r^2 = \frac{r^2}{4} + a_6^2$; $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$	$\Rightarrow \Delta DOC$ é eqüilátero, logo: $a_3 = \frac{r}{2}$
ℓ_4: medida do lado a_4: medida do apótema	ℓ_6: medida do lado a_6: medida do apótema	ℓ_3: medida do lado a_3: medida do apótema

VAMOS EXERCITAR

1) Determine a medida do lado e a do apótema de um quadrado inscrito numa circunferência cujo raio mede 8 dm.

Resolução:

$r = 8\ dm$ $\qquad \ell_4 = r\sqrt{2}$ $\qquad a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

$\ell_4 = 8\sqrt{2}$ $\qquad a_4 = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Resposta: ℓ_4 = $8\sqrt{2}$ dm, e a_4 = $4\sqrt{2}$ dm

2) Calcule a medida do lado e a do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência cujo diâmetro mede 8 cm.

Resolução:

$d = 8\,cm \Rightarrow r = 4\,cm$ $\quad \ell_6 = r$ $\quad \ell_6 = 4$ $\quad a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ $\quad a_6 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\sqrt{3}$

Resposta: ℓ_6 = 4 cm, e a_6 = $2\sqrt{3}$ cm.

3) Descubra a medida do lado e a do apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência cujo raio mede 6 m.

Resolução:

$r = 6\,m$ $\quad \ell_3 = r\sqrt{3}$ $\quad \ell_3 = 6\sqrt{3}$ $\quad a_3 = \frac{r}{2}$ $\quad a_3 = \frac{6}{2} = 3$

Resposta: ℓ_3 = $6\sqrt{3}$, e a_3 = 3 m.

4) A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência é $10\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do raio dessa circunferência.

Resolução:

$\ell_4 = 10\sqrt{2}\,cm$ $\quad \ell_4 = r\sqrt{2}$ $\quad 10\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = 10$

Resposta: r = 10 cm.

5) A medida do raio de uma circunferência é dada pela soma das raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$. Determine a medida do lado de um hexágono regular inscrito nessa circunferência.

Resolução:

$x^2 - \boxed{3}\,x + 2 = 0 \Rightarrow r = 3$ (3 ↓ s)

Logo, $\ell_6 = r$ $\quad \ell_6 = 3$

Resposta: ℓ_6 = 3.

6) A medida do apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência é 7 cm. Calcule a medida do lado de um quadrado e do apótema de um hexágono regular inscritos nessa circunferência.

Resolução:

$a_3 = \frac{r}{2} \Rightarrow 7 = \frac{r}{2}$ $\quad r = 14$ $\quad \ell_4 = r\sqrt{2}$ $\quad \ell_4 = 14\sqrt{2}$ $\quad a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ $\quad a_6 = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

Resposta: ℓ_4 = $14\sqrt{2}$ cm, e a_6 = $7\sqrt{3}$ cm.

7) O perímetro de um hexágono regular inscrito numa circunferência é 48 dm. Determine a medida do lado e a do apótema de um triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência.

Resolução:

$2p = 48 \Rightarrow \ell_6 = 8$ $\quad \ell_6 = r \Rightarrow r = 8$ $\quad \ell_3 = r\sqrt{3}$ $\quad \ell_3 = 8\sqrt{3}$ $\quad a_3 = \frac{r}{2}$ $\quad a_3 = \frac{8}{2} = 4$

Resposta: ℓ_3 = $8\sqrt{3}$ dm, e a_3 = 4 dm.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

a) Complete os quadros:

1)

r	ℓ_4	a_4	ℓ_6	a_6	ℓ_3	a_3
18	$18\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	18	$9\sqrt{3}$	$18\sqrt{3}$	9
20	$20\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	20	$10\sqrt{3}$	$20\sqrt{3}$	10
12	$12\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	12	$6\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	6
16	$16\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	16	$8\sqrt{3}$	$16\sqrt{3}$	8

2)

a_3	r	a_4
3	6	$3\sqrt{2}$
11	22	$11\sqrt{2}$

3)

ℓ_6	ℓ_4	a_3
24	$24\sqrt{2}$	12
36	$36\sqrt{2}$	18

4)

ℓ_3	r	ℓ_4	a_6
$2\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$48\sqrt{3}$	48	$48\sqrt{2}$	$24\sqrt{3}$

b) Resolva:

1) O perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência mede $32\sqrt{2}$ cm. Calcule a medida do apótema de um hexágono regular inscrito nessa circunferência. ($4\sqrt{3}$ cm)

2) Calcule a medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência, sabendo que nessa mesma circunferência encontra-se um triângulo eqüilátero cujo perímetro mede $18\sqrt{3}$ m. ($6\sqrt{2}$ m)

EXERCÍCIOS DE DESENVOLVIMENTO

a) Complete os quadros:

1)

n	a_c	a_e	a_i	S_i	S_e
15	24°	24°	156°	2340°	360°
45	8°	8°	172°	7740°	360°
50	7° 12'	7° 12'	172°48'	8640°	360°
40	9°	9°	171°	6840°	360°

2)

r	ℓ_3	a_3	ℓ_4	a_4	ℓ_6	a_6
1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$2\sqrt{3}$	1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$
2	$\sqrt{12}$	1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$

b) Resolva:

1) Sabendo que o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência mede $5\sqrt{2}$ cm, determine a medida:

a) do lado do hexágono regular inscrito nessa circunferência; (10 cm)

b) do apótema do triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência; (5 cm)

c) do apótema do hexágono regular inscrito nessa circunferência; ($5\sqrt{3}$ cm)

2) A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular inscrito numa circunferência é 720°. Calcule a medida do lado e a do apótema desse polígono, sabendo que o raio da circunferência mede $2\sqrt{3}$ m.

($\ell_6 = 2\sqrt{3}$ m e $a_6 = 3$ m)

3) A medida da diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência é $4\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do lado e a do apótema desse quadrado. $(\ell_4 = 4\ cm \text{ e } a_4 = 2\ cm)$

4) Descubra a razão entre a medida do lado de um triângulo eqüilátero e a medida do lado de um quadrado inscritos numa circunferência cujo raio mede 1 cm. $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

5) Numa circunferência cujo raio mede $4\sqrt{3}$ cm estão inscritos um hexágono regular e um triângulo eqüilátero. Descubra a razão entre a medida do apótema do hexágono e a medida do lado do triângulo. $\left(\frac{1}{2}\right)$

c) Testes:

1) Inscreve-se numa circunferência um quadrado cujo apótema mede $2\sqrt{2}$ cm. A medida da diagonal desse quadrado é:

a. ( ) $4\sqrt{2}$ cm b. ( ) $\sqrt{2}$ cm c. (X) 8 cm d. ( ) 4 cm

2) Numa circunferência está inscrito um triângulo eqüilátero cujo apótema mede 3 cm. A medida do diâmetro dessa circunferência é:

a. ( ) 6 cm b. (X) 12 cm c. ( ) $6\sqrt{3}$ cm d. ( ) $12\sqrt{2}$ cm

3) A medida do diâmetro de uma circunferência é $18\sqrt{3}$ dm. Um hexágono regular inscrito nessa circunferência terá apótema com medida de:

a. (X) 13,5 dm b. ( ) $9\sqrt{3}$ dm c. ( ) 18 dm d. ( ) 27 dm

4) A medida do perímetro de um quadrado inscrito numa circunferência é $40\sqrt{2}$ m. A medida do apótema de um triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência é:

a. ( ) 10 m b. ( ) $10\sqrt{2}$ m c. ( ) $5\sqrt{2}$ m d. (X) 5 m

5) A medida do ângulo central de um polígono regular de 25 lados é:

a. ( ) 25°30′ b. (X) 14°24′ c. ( ) 14°4′ d. ( ) 32°40′

6) A medida do diâmetro de uma circunferência é 4 m. Qual é a medida do lado de um quadrado inscrito nessa circunferência?

a. ( ) 4m b. ( ) $4\sqrt{2}$ m c. (X) $2\sqrt{2}$ m d. ( ) $\sqrt{2}$ m

7) A medida do lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência cujo diâmetro mede 8 m, é:

a. ( ) 8 m b. (X) 4 m c. ( ) 2 m d. ( ) 16 m

8) A medida da diagonal de um quadrado inscrito numa circunferência cujo raio mede $\sqrt{5}$ m, é:

a. (X) $2\sqrt{5}$ m b. ( ) $3\sqrt{5}$ m c. ( ) $\sqrt{5}$ m d. ( ) $4\sqrt{5}$ m

Unidade 17 — O COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

A MEDIDA DO COMPRIMENTO DE UMA CIRCUNFERÊNCIA

Conforme você já estudou na quinta série, a medida do comprimento de uma circunferência é obtida através da fórmula:

$$C = 2\pi R$$

onde:
- C = medida do comprimento da circunferência
- π = número irracional (3,1415926 . . .)
- R = medida do raio da circunferência

Exemplo:

Determine a medida do comprimento de uma circunferência cujo raio mede 4 cm. (Usar π com o valor 3,14; aproximação de 0,01 por falta.)

Resolução:

$R = 4$ cm $\quad C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 = 25{,}12$

Resposta: 25,12 cm.

AGORA FAÇA VOCÊ

a) Conhecendo a medida do raio, calcule a medida do comprimento da circunferência:

1) Raio: 2 dm

Resolução:

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2$

$C = 12{,}56$

Resposta: C = 12,56 dm.

2) Raio: 10 cm

Resolução:

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10$

$C = 62{,}8$

Resposta: C = 62,8 cm.

3) Raio: 1,5 m

Resolução:

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5$

$C = 9{,}42$

Resposta: C = 9,42 m.

b) Conhecendo a medida do diâmetro, determine a medida do comprimento da circunferência:

1) Diâmetro: 16 cm

Resolução:

$d = 16 \Rightarrow R = 8$

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8 = 50{,}24$

Resposta: C = 50,24 cm.

2) Diâmetro: 40 dm

Resolução:

$d = 40 \Rightarrow R = 20$

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6$

Resposta: C = 125,6 dm.

3) Diâmetro: 9 m

Resolução:

$d = 9 \Rightarrow R = 4{,}5$

$C = 2\pi R$

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4{,}5 = 28{,}26$

Resposta: C = 28,26 m.

Com o auxílio da fórmula $C = 2\pi R$ e conhecendo a medida do comprimento da circunferência, você poderá determinar a medida do raio e a do diâmetro.

Exemplo:

Calcule a medida do raio e a do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento é de 6,28 dm.

Resolução:

C = 6,28 dm

$C = 2\pi R$

$6{,}28 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot R \Rightarrow R = \dfrac{6{,}28}{2 \cdot 3{,}14} = \dfrac{6{,}28}{6{,}28} = 1$

$d = 2R$

$d = 2 \cdot 1 = 2$

Resposta: R = 1 dm, e d = 2 dm.

AGORA É A SUA VEZ

Conhecendo a medida do comprimento de uma circunferência, descubra a medida de seu raio e de seu diâmetro:

1) Comprimento: 15,7 cm

Resolução:

$C = 2\pi R$

$15{,}7 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot R$

$R = \dfrac{15{,}7}{6{,}28} = 2{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow d = 5$

Resposta: R = 2,5 cm, e d = 5 cm.

2) Comprimento: 37,68 dm

Resolução:

$C = 2\pi R$

$37{,}68 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot R$

$R = \dfrac{37{,}68}{6{,}28} = 6$

$d = 2 \cdot 6 = 12$

Resposta: R = 6 dm, e d = 12 dm

3) Comprimento: 4,71 m

Resolução:

$C = 2\pi R$

$4{,}71 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot R$

$R = \dfrac{4{,}71}{6{,}28} = 0{,}75$

$d = 2 \cdot 0{,}75 = 1{,}5$

Resposta: R = 0,75 m.

e d = 1,5 m.

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva:

1) Determine a medida do comprimento da circunferência cujo raio mede:

a) 32 cm; (200,96 cm)

b) 50 dm. (314 dm)

2) Calcule a medida do comprimento da circunferência cujo diâmetro mede:

a) 90 mm; (282,6 mm)

b) 7 m. (21,98 m)

3) Descubra a medida do raio e do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento mede:

a) 628 m; (100 m e 200 m)

b) 7,536 cm. (1,2 cm e 2,4 cm)

4) Sabendo que o raio da Terra mede aproximadamente 6 380 km, descubra a medida do comprimento do Equador.

(40 066,4 km)

5) O diâmetro de uma roda mede 0,60 m. Quantas voltas essa roda deve dar para percorrer uma distância de 3 768 m?

(2 000)

MEDIDA DO COMPRIMENTO DE UM ARCO

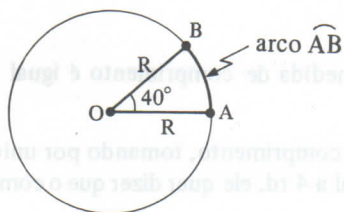
A medida do comprimento de um arco é obtida com o auxílio da fórmula:

$$\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot a_c}{180°}$$

onde:
- ℓ = medida do comprimento do arco.
- R = medida do raio da circunferência que contém o arco.
- a_c = medida do ângulo central correspondente ao arco, ou, então, medida do arco expressa em graus.

Veja um exemplo:

Determine a medida do comprimento de um arco de 40° contido numa circunferência cujo raio mede 9 cm.

Resolução:

$$\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot a_c}{180°} = \frac{3,14 \cdot 9 \cdot 40°}{180°} = 6,28$$

Resposta: 6,28 cm.

AGORA FAÇA VOCÊ

Determine a medida do comprimento de um arco contido numa circunferência cujo raio mede 20 cm, sabendo que a medida desse arco expressa em graus é:

1) 36°

Resolução:

$R = 20$ cm

$a_c = 36°$

$\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot a_c}{180°} = \frac{3,14 \cdot 20 \cdot 36°}{180°}$

$\ell = 12,56$

Resposta: ℓ = 12,56 cm.

2) 60°

Resolução:

$R = 20$ cm

$a_c = 60°$

$\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot a_c}{180°} = \frac{3,14 \cdot 20 \cdot 60°}{180°}$

$\ell = 20,93$

Resposta: ℓ = 20,93 cm.

3) 90°

Resolução:

$R = 20$ cm

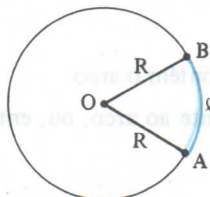
$a_c = 90°$

$\ell = \frac{\pi \cdot R \cdot a_c}{180°} = \frac{3,14 \cdot 20 \cdot 90°}{180°}$

$\ell = 31,4$

Resposta: ℓ = 31,4 cm.

O SURGIMENTO DE UMA NOVA UNIDADE: O RADIANO

Observe a figura:

Admitindo que a medida do comprimento do arco seja igual à medida do comprimento do raio, o ângulo central correspondente constitui uma unidade chamada **radiano** (símbolo: rd).

ℓ: medida do comprimento do arco.

R: medida do comprimento do raio.

Logo, podemos afirmar que:

Radiano é o ângulo central correspondente a um arco cuja medida de comprimento é igual à medida do comprimento do raio da circunferência que contém esse arco.

Desse modo, medir um arco em radianos significa medir o seu comprimento, tomando por unidade o raio da circunferência. Assim, quando alguém diz que a medida de um arco é igual a 4 rd, ele quer dizer que o comprimento do arco corresponde a 4 vezes o comprimento do raio.

Veja alguns exemplos:

- medida do comprimento da circunferência: $2\pi R$ ou 2π rd ou 6,28 rd;
- medida do comprimento da semicircunferência: πR ou πrd ou 3,14 rd;
- medida do comprimento de um arco de 90°: $\frac{\pi R}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$rd ou 1,57 rd.

Como se converte a medida de um arco da unidade grau para radiano e vice-versa?
Para fazer isso, basta você aplicar a proporção:

$$\boxed{\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}}$$ onde

a = medida do arco em graus.
b = medida do arco em radianos.

Exemplos:

1) Qual a medida em radianos de um arco de 60°?

Resolução:

$a = 60°$ $\qquad \frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$$\frac{60}{180} = \frac{b}{\pi} \Rightarrow b = \frac{60 \cdot \pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{3,14}{3} = 1,04$$

Resposta: $\frac{\pi}{3}$rd ou 1,04 rd.

2) Qual a medida em graus de um arco de $\frac{\pi}{4}$rd?

Resolução:

$b = \frac{\pi}{4}$rd $\qquad \frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$$\frac{a}{180} = \frac{\pi/4}{\pi} \Rightarrow \frac{a}{180} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 45$$

Resposta: 45°.

AGORA FAÇA VOCÊ

a) Converta para radiano as seguintes medidas de arco:

1) 30°

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{30}{180} = \frac{b}{\pi} \Longrightarrow b = \frac{30\pi}{180}$

$b = \frac{\pi}{6}$

Resposta: $\frac{\pi}{6}$ rd.

2) 120°

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{120}{180} = \frac{b}{\pi} \Rightarrow b = \frac{120\pi}{180}$

$b = \frac{2\pi}{3}$

Resposta: $\frac{2\pi}{3}$ rd.

3) 72°

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{72}{180} = \frac{b}{\pi} \Rightarrow b = \frac{72\pi}{180}$

$b = \frac{2\pi}{5}$

Resposta: $\frac{2\pi}{5}$ rd.

b) Converta para grau as seguintes medidas de arco:

1) $\frac{\pi}{2}$ rd

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{a}{180} = \frac{\pi/2}{\pi} \Longrightarrow a = 90$

Resposta: 90°

2) $\frac{\pi}{5}$ rd

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{a}{180} = \frac{\pi/5}{\pi} \Longrightarrow a = 36$

Resposta: 36°

3) $\frac{3\pi}{4}$ rd

Resolução:

$\frac{a}{180} = \frac{b}{\pi}$

$\frac{a}{180} = \frac{3\pi/4}{\pi} \Rightarrow a = 135$

Resposta: 135°

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Complete os quadros:

1)

R	a_c	ℓ
10 cm	45°	$\ell = \frac{3{,}14 \cdot 10 \cdot 45}{180} = 7{,}85$ cm
15 dm	72°	$\ell = \frac{3{,}14 \cdot 15 \cdot 72}{180} = 18{,}84$ dm
8 cm	135°	$\ell = \frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 135}{180} = 18{,}84$ cm

2)

Medida em grau	Medida em radiano
150°	$\frac{5\pi}{6}$
$22^\circ 30'$	$\frac{\pi}{8}$
20°	$\frac{\pi}{9}$
75°	$\frac{5\pi}{12}$
108°	$\frac{3\pi}{5}$

a) Resolva:

1) A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência é $8\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do comprimento dessa circunferência. (50,24 cm)

2) Calcule a medida do comprimento de uma circunferência, sabendo que o lado de um hexágono regular nela inscrito mede 0,8 dm. (5,024 dm)

3) Sabe-se que a medida do apótema de um triângulo eqüilátero é 1,4 m. Descubra a medida do comprimento da circunferência circunscrita nesse triângulo. (17,584 m)

4) Determine a medida do comprimento de um arco de 15°, sabendo que na circunferência que contém esse arco encontra-se inscrito um quadrado cuja diagonal mede 12 cm. (1,57 cm)

5) O perímetro de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência mede $21\sqrt{3}$ dm. Calcule a medida do comprimento dessa circunferência. (43,96 dm)

b) Complete os quadros:

1)

ℓ_3	R	Comprimento da circunferência	Comprimento de um arco de 60° contido nessa circunferência
$15\sqrt{3}$	15	94,2	15,7
$2\sqrt{3}$	2	12,56	2,09
$10\sqrt{3}$	10	62,8	10,46

2)

a_6	R	Comprimento da circunferência	Comprimento de um arco de 45° contido nessa circunferência
$8\sqrt{3}$	16	100,48	12,56
$2\sqrt{3}$	4	25,12	3,14
$10\sqrt{3}$	20	125,6	15,7

3)

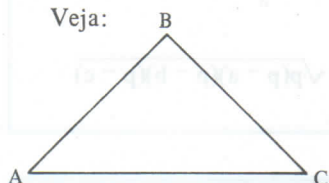
Medida de um arco (em grau)	Medida desse mesmo arco (em radiano)
20°	$\pi/9$
112° 30'	$\frac{5\pi}{8}$
18°	$\frac{\pi}{10}$
125°	$\frac{25\pi}{36}$

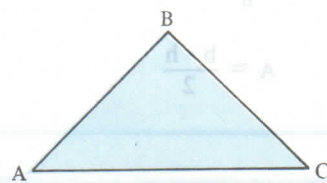
A MEDIDA DAS SUPERFÍCIES PLANAS

NOÇÃO DE REGIÃO POLIGONAL

Você já sabe o que é um polígono. Pois bem, a união do polígono com o seu interior constitui uma figura denominada região poligonal.

Veja:

U =

ΔABC (O triângulo é um polígono.)

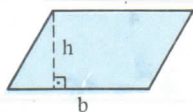
Interior do triângulo

Região poligonal (Neste caso, trata-se de uma região triangular)

Toda região poligonal constitui uma superfície plana, cuja medida, em relação a uma certa unidade, é expressa por um número real positivo. Tal medida recebe o nome de **área**.

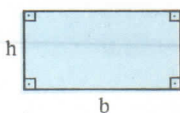
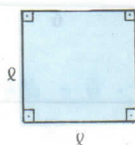
DETERMINAÇÃO DA ÁREA DAS REGIÕES POLIGONAIS

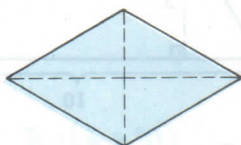
Estudaremos, a seguir, o cálculo da área das principais regiões poligonais, que, por comodidade, chamaremos de **área do polígono**.

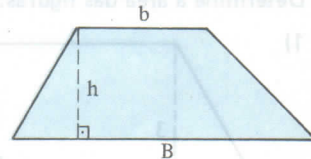
Quadrilátero

Paralelogramo

$A = b \cdot h$

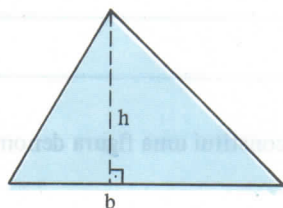
Retângulo

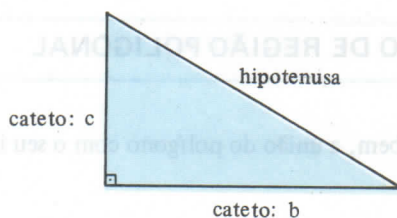
$A = b \cdot h$

Quadrado

$A = \ell^2$

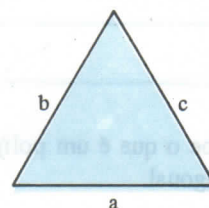
Losango

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

Trapézio

$A = \frac{(B + b)h}{2}$

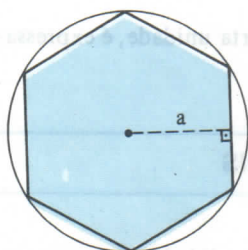
Triângulo

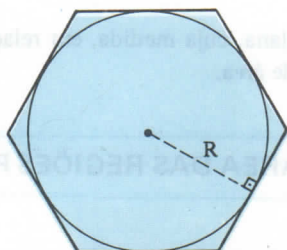
Triângulo qualquer

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

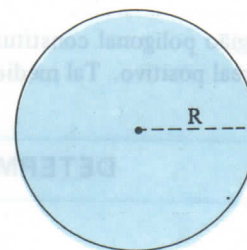
Triângulo retângulo

$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

Triângulo qualquer, sendo conhecidas as medidas dos lados.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Polígono regular convexo

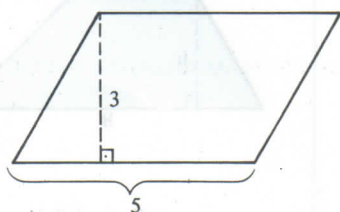
Inscrito

$A = p \cdot a$

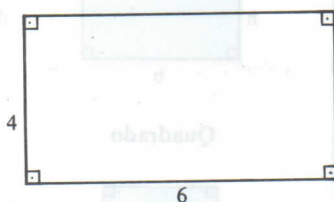
Circunscrito

$A = p \cdot R$

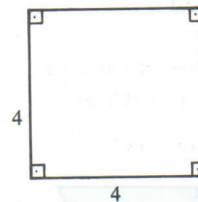
Círculo

$A = \pi \cdot R^2$

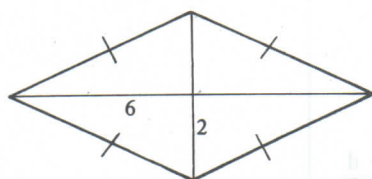
VAMOS EXERCITAR

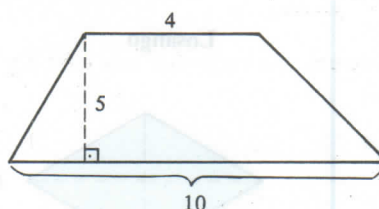
a) Determine a área das figuras:

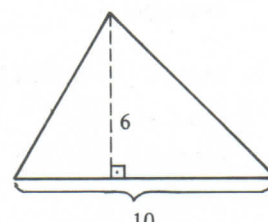
1)

A = 5 . 3 = 15

2)

A = 6 . 4 = 24

3)

A = $4^2 = 16$

4)

A = $\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$

5)

A = $\frac{(10+4) \cdot 5}{2} = 35$

6)

A = $\frac{10 \cdot 6}{2} = 30$

7)

$A = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

8)

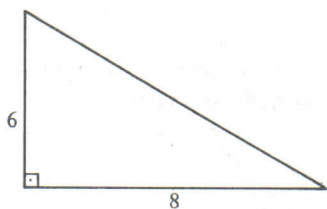
$2p = 5 + 7 + 8 = 20$

$p = 10$

$A = \sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

9)

10)

$\ell_3 = 4\sqrt{3}$ $2p = 12\sqrt{3}$ $A = 6\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$ $A = 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$

$a_3 = \frac{4}{2} = 2$ $p = 6\sqrt{3}$

b) Resolva:

1) Calcule a área de um retângulo, sabendo que a medida da base é 15 cm e a da altura corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida da base.

Resolução:

$b = 15$

$h = \frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ $\Rightarrow A = 15 \cdot 10 = 150$

Resposta: $A = 150 \text{ cm}^2$.

2) A medida da base de um retângulo excede em 3 cm a da altura. Determine as dimensões desse retângulo, cuja área é igual a 10 cm^2.

Resolução:

$b = x + 3$

$h = x$ $\Rightarrow A = (x+3) \cdot x$

$A = 10$ $10 = x^2 + 3x \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$ $\begin{cases} x' = 2 \\ x'' = -5 \end{cases}$ Então $\begin{cases} b = 2 + 3 = 5 \\ h = 2 \end{cases}$

Resposta: $b = 5$ cm e $h = 2$ cm.

3) Determine a medida do lado de um quadrado cuja área é 64 dm^2.

Resolução:

$\ell = x$ $A = x^2$

$A = 64$ $\Rightarrow 64 = x^2 \Rightarrow x = 8$

Resposta: $\ell = 8$ dm.

4) Calcule a área de um trapézio, sabendo que a medida da base maior é 20 cm, a da altura é 4 cm e a da base menor é igual a $\frac{3}{4}$ da medida da base maior.

Resolução:

B = 20

h = 4 $\Rightarrow$ A = $\frac{(20+15)\cdot 4}{2} = \frac{35\cdot 4}{2} = 70$

b = $\frac{3}{4}\cdot 20 = 15$

Resposta: A = $70\ cm^2$.

5) Determine a área de um triângulo cujos lados medem 5 cm, 6 cm e 7 cm.

Resolução:

a = 5

b = 6

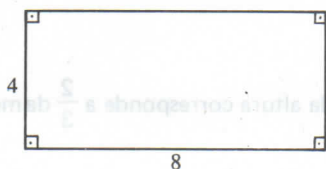
c = 7 $\Rightarrow$ A = $\sqrt{9\cdot(9-5)(9-6)(9-7)}$

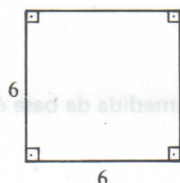
p = $\frac{5+6+7}{2} = 9$ A = $\sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 6\sqrt{6}$

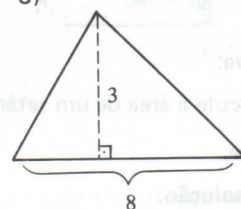
Resposta: A = $6\sqrt{6}\ cm^2$

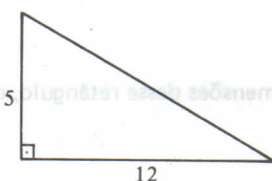
VERIFIQUE O QUE APRENDEU

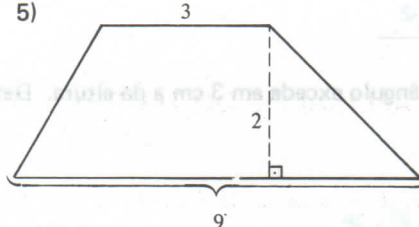
a) Descubra a área das seguintes superfícies:

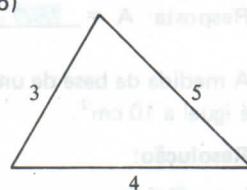
1)

A = $8\cdot 4 = 32$

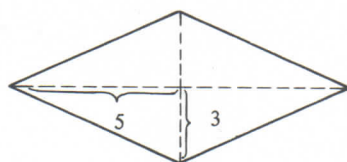
2)

A = $6^2 = 36$

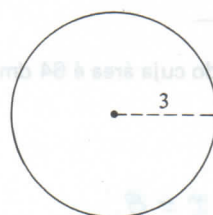
3)

A = $\frac{8\cdot 3}{2} = 12$

4)

A = $\frac{5\cdot 12}{2} = 30$

5)

A = $\frac{(9+3)\cdot 2}{2} = 12$

6)

A = $\sqrt{6\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 6$

7)

A = $\frac{10\cdot 6}{2} = 30$

8)

A = $3{,}14\cdot 9 = 28{,}26$

b) Resolva:

1) A base de um paralelogramo mede 18 cm. Determine sua área, sabendo que a medida da altura corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida da base. ($216\ cm^2$)

2) A medida da base de um retângulo excede em 5 cm a medida da altura. Calcule as dimensões desse retângulo, sabendo que a sua área é de 24 cm^2. (8 cm e 3 cm)

3) A área de um quadrado é 25 dm^2. Descubra a medida do lado desse quadrado. (5 dm)

4) Determine o perímetro de um quadrado cuja área é 49 m^2. (28 m)

5) As medidas das diagonais de um losango são 8 cm e 12 cm. Calcule a sua área. ($48\ cm^2$)

6) Determine a área de um triângulo cujos lados medem 12 dm, 13 dm e 15 dm. ($20\sqrt{14}\ dm^2$)

7) Descubra a área de um círculo cujo diâmetro mede 20 m. ($314\ m^2$)

8) A área de um círculo é 12,56 m^2. Calcule a medida do comprimento da circunferência. (12,56 m)

9) Descubra a área de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência cujo raio mede 3 cm. ($\frac{27\sqrt{3}}{4}\ cm^2$)

10) Um quadrado encontra-se inscrito numa circunferência cujo diâmetro mede 20 cm. Determine a área desse quadrado. ($200\ cm^2$)

11) Determine a área do hexágono regular inscrito numa circunferência cujo raio mede 4 dm. ($24\sqrt{3}\ dm^2$)

12) A medida da base maior de um trapézio excede em 6 dm a medida da base menor. Descubra as medidas das bases, sabendo que a altura mede 3 dm e que a área é 21 dm^2. (10 dm e 4 dm)

UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

Muitas vezes, para acharmos as dimensões necessárias ao cálculo da área de uma superfície, temos que aplicar o teorema de Pitágoras.

Veja:

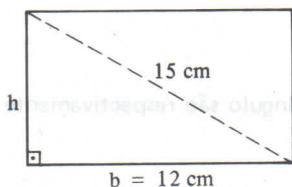
A medida da base de um retângulo é 12 cm. Descubra a área desse retângulo, sabendo que a sua diagonal mede 15 cm.

Resolução:

$h^2 + 12^2 = 15^2$

$h^2 + 144 = 225$

$h^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow h = 9$

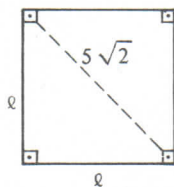
$A = b \cdot h$

$A = 12 \cdot 9$

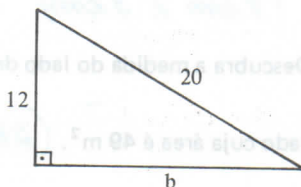
$A = 108$

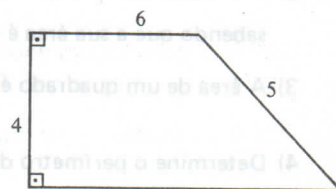
Resposta: 108 cm^2.

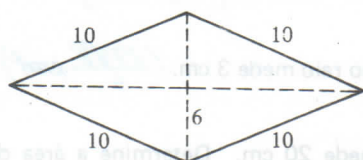
AGORA FAÇA VOCÊ

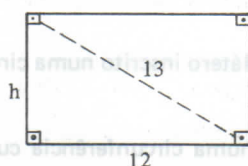
Determine a área dos polígonos:

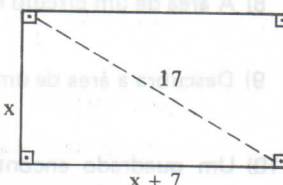
1)

A = 25

2)

A = 96

3)

A = 30

4)

A = 96

5)

A = 60

6)

A = 120

VERIFIQUE O QUE APRENDEU

Resolva:

1) A medida da diagonal de um quadrado é 4 cm. Determine a sua área. ($8\ cm^2$)

2) A área de um quadrado é de 10 m². Determine o seu perímetro e a medida de sua diagonal. ($4\sqrt{10}\ m$ e $2\sqrt{5}\ m$)

3) A medida da base de um retângulo é o dobro da medida de sua altura. Determine a área desse retângulo, sabendo que a sua diagonal mede $2\sqrt{5}$ dm. ($8\ dm^2$)

4) A medida da base de um retângulo excede em 2 cm a medida de sua altura. Sabendo que a diagonal mede $2\sqrt{13}$ cm, calcule a sua área. ($24\ cm^2$)

5) As medidas da altura, da base menor e do lado não-paralelo de um trapézio retângulo são respectivamente 5 m, 10 m e 13 m. Calcule a área desse trapézio. ($80\ m^2$)

6) A medida da diagonal menor de um losango é 30 m. Calcule a sua área, sabendo que seu perímetro mede 100 m. ($600\ m^2$)

a) Resolva:

1) A medida da base de um retângulo excede em 4 unidades a medida de sua altura. Calcule a área desse retângulo, sabendo que sua diagonal mede $4\sqrt{13}$ dm. ($96\ dm^2$)

2) A diagonal de um quadrado mede 12 cm. Determine a sua área. ($72\ cm^2$)

3) O perímetro de um retângulo mede 32 m, e a sua diagonal, $2\sqrt{34}$ m. Calcule a área desse retângulo. ($60\ m^2$)

4) Um quadrado encontra-se inscrito numa circunferência cujo diâmetro mede 6 m. Determine a área do quadrado e do círculo correspondente. ($18\ m^2$ e $28{,}26\ m^2$)

5) As medidas das diagonais de um losango são expressas em metros pelas raízes da equação: $x^2 - 10x + 24 = 0$. Descubra a área desse losango e o seu perímetro. ($12\ m^2$ e $4\sqrt{13}\ m$)

6) A raiz positiva da equação $x^2 - 5x - 6 = 0$ representa, em metros, a medida do raio de uma circunferência. Calcule a área de um triângulo eqüilátero inscrito nessa circunferência. ($27\sqrt{3}\ m^2$)

7) A soma algébrica das raízes da equação $x^2 - 8x + 12 = 0$ representa a medida, em metros, do diâmetro de uma circunferência. Descubra a área de um hexágono regular inscrito nessa circunferência. ($24\sqrt{3}\ m^2$)

8) A medida da base de um triângulo isósceles é 4 dm. Determine a área desse triângulo, sabendo que o seu perímetro mede 20 dm. ($4\sqrt{15}\ dm^2$)

9) A medida de um dos catetos de um triângulo retângulo corresponde ao dobro da medida do outro. Determine a área desse triângulo, sabendo que sua hipotenusa mede $10\sqrt{5}$ dam. ($100\ dam^2$)

10) A medida do lado de um quadrado inscrito numa circunferência é $10\sqrt{2}$ cm. Determine a área do círculo correspondente. ($314\ cm^2$)

11) Descubra a medida da base de um triângulo, sabendo que sua altura mede 10 m e sua área é de $75\ m^2$. ($15\ m$)

12) A área de um triângulo é de $36\ dm^2$. Determine a medida da altura desse triângulo, sabendo que sua base mede 12 dm. ($6\ dm$)

13) As medidas das bases de um trapézio isósceles são 3 m e 15 m. Sabendo que o perímetro desse trapézio é de 38 m, determine a sua área. ($72\ m^2$)

14) O perímetro de um triângulo eqüilátero mede 18 m. Descubra a sua área. ($9\sqrt{3}\ m^2$)

15) A diagonal menor de um losango mede 10 cm. Descubra a área desse losango, sabendo que seu perímetro é de 52 cm. ($120\ cm^2$)

b) Testes:

1) Um triângulo retângulo cujos lados medem 12 cm, 16 cm e 20 cm está inscrito numa circunferência. A área do círculo correspondente é de:

a) (X) 100π cm² b) ( ) 36π cm² c) ( ) 64π cm² d) ( ) 144π cm²

2) Uma das diagonais de um losango mede 6 m. Como a área desse losango é de 24 m², a medida da outra diagonal é de:

a) ( ) 6 m b) (X) 8 m c) ( ) 10 m d) ( ) 12 m

3) A base de um retângulo mede $3\sqrt{2}$ cm, e a sua área é 12 cm². O perímetro desse retângulo mede:

a) ( ) 12 cm b) ( ) 14 cm c) ( ) $8\sqrt{2}$ cm d) (X) $10\sqrt{2}$ cm

4) O perímetro de um quadrado cuja área é igual a 10 m², é de:

a) ( ) 10 m b) (X) $4\sqrt{10}$ m c) ( ) $\sqrt{10}$ m d) ( ) 40 m

5) A área de um triângulo eqüilátero cujo perímetro mede 30 m, é de:

a) ( ) 30 m² b) ( ) 100 m² c) (X) $25\sqrt{3}$ m² d) ( ) $5\sqrt{3}$ m²

6) As bases de um trapézio medem 8 cm e 12 cm. Sabendo que a sua área é de 50 cm², podemos afirmar que a sua altura mede:

a) (X) 5 cm b) ( ) 3 cm c) ( ) 4 cm d) ( ) 6 cm

7) A área de um hexágono regular inscrito numa circunferência é de 20 cm². Sabendo que o seu apótema mede 2 cm, podemos afirmar que o seu perímetro mede:

a) ( ) 40 cm b) ( ) 16 cm c) ( ) 10 cm d) (X) 20 cm

8) Se a medida do comprimento de uma circunferência é 20π m, então a área do círculo correspondente a essa circunferência será de:

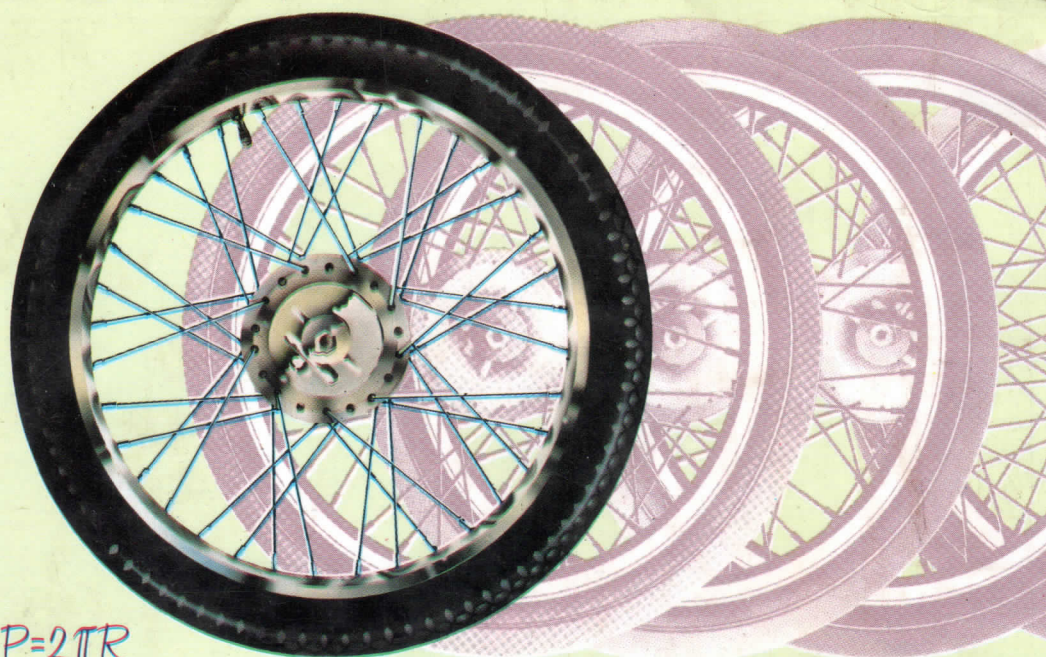
a) (X) 100π m² b) ( ) 20π m² c) ( ) 50π m² d) ( ) 25π m²

9) As bases e o lado oblíquo de um trapézio retângulo medem, respectivamente, 12 m, 30 m e 30 m. Podemos afirmar então que sua área é de:

a) ( ) 252 m² b) ( ) 192 m² c) (X) 504 m² d) ( ) 96 m²

10) Os lados de um paralelogramo medem 4 cm e 6 cm. Sabendo que a medida da diagonal menor é de 6 cm, podemos dizer que a sua área é de:

a) ( ) 24 cm² b) (X) $16\sqrt{2}$ cm² c) ( ) $12\sqrt{2}$ cm² d) ( ) 16 cm²

Impresso por W. Roth & Cia. Ltda

P=2πR
1m
1m
Metro quadrado:
unidade fundamental de
medida de área, correspondente
à área de um quadrado,
cuja medida do comprimento
do lado é de 1 metro.